Claude Flament

Teoría de grafos y estructuras de grupo

EF
ESTRUCTURA Y FUNCION
EDITORIAL TECNOS - MADRID

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

1. QUENTIN GIBSON: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. ASHLEY MONTAGU: *La dirección del desarrollo humano* (2ª ed.).
3. GUSTAV BERGMANN: *Filosofía de la ciencia.*
4. CHRISTIAN BAY: *La estructura de la libertad.*
5. ERNEST NAGEL: *La lógica sin metafísica.*
6. DAVID HILBERT y WILHELM ACKERMANN: *Elementos de lógica teórica* (2ª ed.).
7. VERNON VAN DYKE: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. KARL R. POPPER: *La lógica de la investigación científica.*
9. R. M. MARTIN: *Verdad y denotación.*
10. ERNEST GELLNER: *Palabras y cosas.*
11. C. O. BROAD: *El pensamiento científico.*
12. JOHN HOSPERS: *La conducta humana.*
13. ARTHUR PAP: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. SCHELLING: *La estrategia del conflicto.*
15. RICHARD B. BRAITHWAITE: *La explicación científica.*
16. MILIC CAPEK: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. ROS ASHBY: *Proyecto para un cerebro.*
18. HANS REICHENBACH: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. GEORGE POLYA: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. GEORGE L. S. SHACKLE: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. ARMSTRONG: *La percepción y el mundo físico.*
22. ERNEST NAGEL: *Razón soberana.*
23. MAX BLACK: *Modelos y metáforas.*
24. HASKELL B. CURRY y ROBERT FEYS: *Lógica combinatoria.*
25. LUDWIG WITTGENSTEIN: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. ABRAHAM EDEL: *El método en la teoría ética.*
27. ALFRED LANDE: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. JEAN LADRIERE: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. WIENER y J. P. SCHADE: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. VON WRIGHT: *Norma y acción. Una investigación lógica.*
31. E. NAGEL y J. P. NEWMAN: *El teorema de Gödel.*
32. HENRY MARGENAU: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. CHAPPELL: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. ALF ROSS: *Lógica de las normas.*
35. WILFRID SELLARS: *Ciencia, Percepción y Realidad.*
36. CHRISTIAN THIEL: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*

TEORIA DE GRAFOS
Y
ESTRUCTURAS DE GRUPO

ESTRUCTURA Y FUNCION

EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

Claude Flament

TEORIA DE GRAFOS
Y
ESTRUCTURAS DE GRUPO

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
APPLICATIONS OF GRAPH THEORY TO GROUP STRUCTURE
publicada en inglés por PRENTICE–HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.
Copyright © 1963 by Prentice-Hall, Inc.
son propiedad de EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción por
JUAN SANCHEZ–CUENCA

Juan Antonio:
Año del movimiento
de J. MC.
lo demás no importa.
J. Sánchez Cuenca

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1972
O'Donnell, 27. Tel. 226 29 23. Madrid 9
Printed in Spain - Impreso en España. Depósito Legal: M. 25702.—1972

Gráficas Halar, S. L.-Andrés de la Cuerda, 4.-Madrid-15.-1972

INDICE

INTRODUCCION ... Pág. 9

I. INTRODUCCION A LA TEORIA DE GRAFOS ... 11
1. Conjuntos y operaciones entre conjuntos ... 11
2. Relaciones y funciones ... 17
3. Conjuntos ordenados; laticias ... 22
4. Distancias en un conjunto ... 24
5. Grafos y caminos de un grafo ... 28
6. Longitudes y desviaciones de un grafo ... 35
7. Conexidad de un grafo y nociones afines ... 42
8. El conjunto de grafos de *n* puntos ... 50
9. Diversos tipos de grafos ... 54

II. REDES DE COMUNICACION ... 57
1. El problema ... 57
2. Descripción de una red de comunicación ... 58
3. Descripción de una tarea en términos de comunicación ... 62
4. Organización óptima ... 66
5. Aplicaciones ... 86

III. PROCESOS DE EQUILIBRAMIENTO ... 97
1. El problema ... 97
2. Definición del equilibrio de un grafo ... 98
3. Características de grafos equilibrados ... 100
4. Grado de desequilibrio de un grafo ... 106
5. Procesos de equilibramiento ... 115
6. Aplicaciones ... 132

BIBLIOGRAFIA ... 135

INDICE DE AUTORES Y MATERIAS ... 141

La primera edición de esta obra de C. Flament corresponde a su versión en lengua inglesa publicada en U.S.A. por Prentice-Hall, Inc., en el año 1963.

La versión francesa original fue publicada por Gauthier-Villars y Mouton dos años más tarde, en 1965.

La actual versión española se ha realizado traduciendo al castellano la versión inglesa de 1963 pero siguiendo de cerca la edición francesa en todos aquellos puntos que podían ofrecer alguna duda. En ciertos casos en que se requería acuñar en castellano términos técnicos de difícil versión a nuestra lengua, se ha utilizado la raíz francesa, más cercana a una comprensión intuitiva de los mismos.

El contenido de la obra no difiere en sus versiones inglesa y francesa, a excepción de ciertas pruebas matemáticas más profusamente expuestas en algunos casos de la segunda versión. (*N. del T.*).

INTRODUCCION

Se suele aceptar que una ciencia que ha alcanzado su madurez debe hacerse matemática y que debe, por tanto, *hacer uso de los números.*

Este por tanto *nos parece discutible. Los números – o, más exactamente, los conjuntos numéricos – pertenecen a la familia de las estructuras matemáticas. Traducir un problema a términos matemáticos consiste en definir al menos un isomorfismo parcial entre el problema y una estructura matemática adecuada. La estructura puede ser numérica o no; lo fundamental es que sea adecuada: el isomorfismo debe ser demostrable.*

Aunque las estructuras matemáticas son especialmente ricas – tienen numerosas propiedades y altamente complejas –, raras veces se puede mostrar que un hecho de comportamiento posee tales propiedades; y aún es más raro que la cuestión llegue a plantearse; por ello pocas veces es legítimo un modelo numérico.

En consecuencia matematizaremos problemas de las ciencias del comportamiento por medio de estructuras más pobres, con menos propiedades y más simples, de modo que sean fácilmente identificables en la realidad.

La teoría de grafos, que será presentada como teoría matemática de relaciones cualesquiera, nos ofrece estructuras pobres en propiedades que no pueden ser observadas en la conducta, pero que son ricas en posibilidades de aplicación a las ciencias del comportamiento.

Con frecuencia se piensa que la teoría de grafos sólo es útil para descripciones estáticas; que esto no es así lo intentaremos mostrar en el capítulo 3. Debemos reconocer, sin embargo, que las posibilidades de aplicación de la teoría de grafos a las ciencias del comportamiento no han sido todavía suficientemente estudiadas; por el momento sólo pueden mostrarse unos cuantos ejemplos, lo cual constituye el objeto de este breve trabajo.

Quisiera hacer llegar mi reconocimiento a aquellos que, por su enseñanza en psicología y matemáticas, por su estímulo y consejo, me ayudaron en mis investigaciones en matemáticas para su aplicación a las ciencias del comportamiento: Prof. P. Fraisse (Sorbonne), que dirigió mi investigación en redes de comunicación; prof. G. Th. Guilbaut y prof. M. Barbut (Ecole Pratique des Hautes Etudes, Paris) y prof. J. M. Faverge (Université Libre de Bruxelles), que dirigieron mi formación matemática; mi amigo H. Rouanet (Centre d'Etudes et de Recherches Psychotechniques, Paris), cuya asistencia fraternal y crítica fue a menudo decisiva; Claude Berge (Centre

National de la Recherche Scientifique , Paris), cuyo libro y apoyo personal han constituido la base de esta investigación; prof. R. D. Luce (Pennsylvania State University), cuyos trabajos sobre aplicación de la teoría de grafos a redes de comunicación han sido el punto de partida para mi investigación; y prof. J. S. Coleman (The Johns Hopkins University), cuya cariñosa insistencia me impulsó a escribir este libro.

CLAUDE FLAMENT

*Claude Berge, *Théorie des graphes et ses applications* (Paris: Dunod, 1958). Traducción española: *Teoría de las Redes y sus Aplicaciones* (México: CECSA, 1962).

I. INTRODUCCION A LA TEORIA DE GRAFOS

1. CONJUNTOS Y OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS.

1.1. *Introducción.*

Un *conjunto* es una colección cualquiera de objetos; tales objetos son llamados *elementos* o *puntos* del conjunto.

Un conjunto es denotado usualmente por una letra mayúscula latina; por ejemplo: S, A, B, X, ... ; sus elementos se representan por minúsculas latinas: a, b, x, ... Pero esto es tan sólo una indicación de carácter general.

a es un elemento del conjunto S se representa por

$$a \in S,$$

que se debe leer: a pertenece a S.

a *no es* un elemento de S se representa por

$$a \notin S,$$

que se lee: a no pertenece a S.

Si los elementos de un conjunto S son a, b, c y d, esto se representa por

$$S = \{a, b, c, d\}.$$

El orden en que son escritos los elementos de un conjunto no tiene significado especial alguno:

$$\{a, b, c, d\} = \{b, d, c, a\}.$$

Un conjunto puede ser definido por la *enumeración* de sus elementos, como en el ejemplo anterior; pero también puede ser definido por una *propiedad* perteneciente a todos sus elementos, de modo que todos los elementos que tengan tal propiedad figuren en el conjunto; por ejemplo, el conjunto de los números primos puede representarse por

$$S = \{x / x \text{ es un número primo}\}.$$

Este método nos permite hablar acerca de un conjunto que por alguna razón no puede ser enumerado; se puede tratar así la propiedad que caracteriza a los elementos.

La *potencia* de un conjunto es el número de sus elementos; se denota por la letra que representa al conjunto, escrita entre dos trazos verticales. La potencia de S es $|S|$.

La potencia de un conjunto puede ser de varias clases. Aquí sólo consideraremos conjuntos con potencias *finitas*. La teoría de conjuntos finitos es muy simple; las dificultades sólo aparecen con conjuntos infinitos.

Conviene considerar un conjunto con potencia nula; es decir, un conjunto carente de elementos, llamado *conjunto vacío* y representado por ϕ.

Si un conjunto S está constituido por un solo elemento a, escribimos: $S = \{a\}$; a, que es un elemento, debe ser distinguido de $\{a\}$, que es un conjunto.

A menudo conviene representar un conjunto por un círculo, llamado *círculo de Euler.* Los elementos del conjunto se representan dentro del círculo, aunque muchas veces su notación concreta es omitida: *sabemos* que los elementos de un conjunto están dentro del círculo que representa al conjunto. Esta técnica será mostrada más adelante en relación con las operaciones entre conjuntos.

1.2 *Unión de conjuntos.*

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{c, d, e\}$ dos conjuntos; el conjunto C, formado por los elementos que pertenecen a A o a B, es llamado *unión* y denotado por

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

La *o* no es exclusiva: x puede pertenecer sólo a A, o sólo a B, o a A y a B a la vez. En el ejemplo anterior tenemos

$$C = \{a, b, c, d, e\};$$

el elemento c pertenece a ambos A y B.

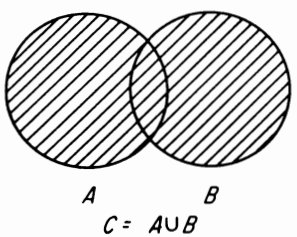


FIGURA 1.1

En la figura 1.1 los conjuntos A y B están representados por círculos de Euler; el conjunto C no está representado por un círculo, sino por el área totalmente sombreada.

La unión de conjuntos se compara con frecuencia con la suma aritmética. Esta analogía es peligrosa. Por ejemplo, generalmente $|A| + |B| \neq |A \cup B|$; en el caso anterior $A = 3$, $B = 3$ y $|A \cup B| = 5$. En todo caso la unión es perfectamente comparable con la *operación lógica "o"*, que de hecho ha sido utilizada para definir la unión.

La unión es *tautológica* o *idempotente:* la unión de un conjunto consigo mismo produce el mismo conjunto.

$$A \cup A = A$$

Es demostrable que la operación de unión sigue la *ley conmutativa,*

$$A \cup B = B \cup A,$$

así como la *ley asociativa.* Sean A, B y C tres conjuntos; sea $D = A \cup B$ y $E = C \cup D$. Podemos entonces escribir

$$E = C \cup (A \cup B)$$

y también

$$E = (C \cup A) \cup B;$$

esta es la ley asociativa. Escribiremos, sin paréntesis,

$$E = A \cup B \cup C$$

Supongamos que tenemos r conjuntos A_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$; si queremos representar la unión de estos r conjuntos, podemos escribir, basados en las leyes conmutativa y asociativa,

$$\bigcup_{i=1}^{r} A_i.$$

1.3. *Intersección de conjuntos.*

La intersección C de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a *ambos* A y B; escribimos entonces

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

La sección sombreada de la figura 1.2 representa la intersección.

Si los conjuntos no tienen ningún elemento común, su intersección es *vacía:* $A \cap B = \phi$. Decimos entonces que tales conjuntos son *disyuntos.* Los conjuntos disyuntos pueden representarse por círculos de Euler no secantes, aunque no es necesario.

A menudo se compara la intersección de conjuntos con la multiplicación aritmética, pero es preferible compararla con la *operación lógica "y".*

La operación de intersección, al igual que la de unión, es tautológica;

$$A \cap A = A;$$

y sigue la ley conmutativa:

$$A \cap B = B \cap A;$$

y la ley asociativa:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

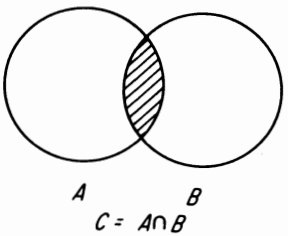


FIGURA 1.2

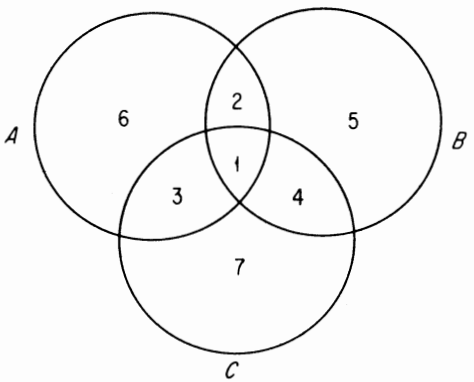


FIGURA 1.3

La intersección de varios conjuntos A_i $(i = 1, 2, ..., r)$ será representada por

$$\bigcap_{i=1}^{r} A_i .$$

Las operaciones de unión e intersección siguen cada una de ellas la *ley distributiva* con respecto a la otra; unión con respecto a intersección:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ;$$

e intersección con respecto a unión:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

Estos resultados, igual que los precedentes, pueden ser representados por círculos de Euler. La figura 1.3 muestra tres conjuntos, A, B y C. Las áreas de la figura están numeradas de 1 a 7; por ejemplo, $\{1\}$ se refiere al conjunto $A \cap B \cap C$. Considerando la aplicación de la ley distributiva a la unión con respecto a la intersección tenemos:

$$B \cap C = \{1, 4\}, \qquad A = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Por tanto $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \; A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}.$$

De aquí que $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

$$= \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Por consiguiente $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Y finalmente $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.4. *Diferencia y diferencia simétrica.*

La diferencia $C = A - B$ es el conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B:

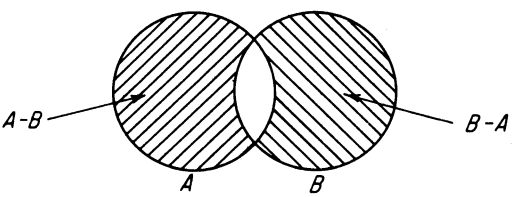


FIGURA 1.4

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Tenemos (ver figura 1.4) que $A - B \neq B - A$.

El conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B y de elementos que pertenecen a B pero no a A se llama *diferencia simétrica* de los dos conjuntos A y B. Simbólicamente,

$$C = A \oplus B ;$$

que da $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$,

y también $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ (ver fig. 1.4)

La diferencia simétrica es una operación conmutativa:

$$A \oplus B = B \oplus A.$$

1.5. *Producto cartesiano.*

Sea $A = \{ a, b, c, d \}$ y $B = \{ x, y, z \}$; construyamos la tabla $|A| x |B|$ con los elementos de A encabezando cada fila y los elementos de B encabezando cada columna. Pongamos dentro de cada casilla el par consistente de la letra que figura como cabeza de fila, como primer término, y la letra cabeza de columna como segundo término (el orden en un par es esencial):

$B =$

$A =$	x	y	z
a	(a, x)	(a, y)	(a, z)
b	(b, x)	(b, y)	(b, z)
c	(c, x)	(c, y)	(c, z)
d	(d, x)	(d, y)	(d, z)

El conjunto de pares que figura en la tabla es el producto cartesiano C de los conjuntos A y B (en este orden):

$$C = AB = \{ (a, x), (a, y), (a, z), \ldots, (d, z) \}.$$

El producto cartesiano es una operación completamente diferente de las presentadas con anterioridad. Los elementos de la unión, por ejemplo, son de la misma clase que los elementos de cada conjunto; sin embargo aquí los elementos del producto son de un nuevo tipo: pares de elementos.

En general el producto cartesiano no sigue la ley conmutativa: $AB \neq BA$. Esto es debido al papel que juega el orden de los términos en los pares: $(a, x) \neq (x, a)$, pero $(a, x) \in AB$ mientras que $(x, a) \notin AB$; y $(x, a) \in BA$ en tanto que $(a, x) \notin BA$.

Un caso especial de producto cartesiano, muy importante para el tema de este libro, lo constituye el producto de un conjunto por sí mismo, AA, representado por A^2, en analogía con la multiplicación aritmética. Si $A = \{ a, b, c \}$, entonces

$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c) \}.$$

Los pares con dos términos idénticos, $(a, a), (b, b), (c, c)$, reciben el nombre de *pares diagonales.* Realmente están en las casillas de una de las diagonales de la tabla del producto $|A| \times |A|$

	a	b	c .
a	(a, a)	(a, b)	(a, c)
b	(b, a)	(b, b)	(b, c)
c	(c, a)	(c, b)	(c, c)

1.6. *Subconjuntos; inclusión.*

Un conjunto A' es un subconjunto del conjunto A si todos los elementos de A' lo son también de A. (Fig. 1.5); escribimos $A' \subset A$, que se lee: A' está incluido en A, o A' es un subconjunto de A.

Si $A' \subset A$, es evidente (ver la figura) que

$$A' \cap A = A',$$

y $$A' \cup A = A.$$

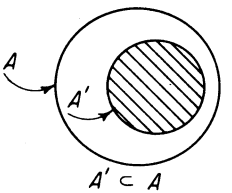


FIGURA 1.5

Obsérvese que la definición "$A' \subset A$" implica que si $a \in A'$ entonces $a \in A$" no especifica si algún elemento de A no pertenece a A'; en especial $A \subset A$. Si se sabe que existe al menos un elemento de A que no pertenece a A', este caso puede representarse por $A' \subset \subset A$, que se lee: A' está *estrictamente* incluido en A.

El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto: $\phi \subset A$ para todo conjunto A.

1.7. *Conjunto de partes; partición.*

Dado un conjunto S, cualquier subconjunto S' de S es llamado también *parte de S;* consideremos todos los subconjuntos de S o todas las partes de S. Llamaremos *conjunto de las partes de S* al conjunto de elementos que son subconjuntos o partes de S. Simbólicamente: $\mathfrak{p}(S)$; este conjunto es *un conjunto de conjuntos.*

Si $S = \{ a, b, c \}$, entonces

$$\mathfrak{p}(S) = \{ \phi, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}.$$

Nótese que, en virtud de la definición de subconjunto, el conjunto vacío y el mismo conjunto S son partes de $\mathfrak{p}(S)$.

Simbólicamente:

$$\mathfrak{p}(S) = \{ S' \mid S' \subset S \}$$

Una *partición de S* consiste en un subconjunto de $\mathfrak{p}(S)$ con propiedades especiales. Dados r partes o subconjuntos de S, $S'_1, S'_2, \ldots S'_r$, constituyen una partición de S si y sólo si

1. $\bigcup_{i=1}^{r} S_i = S$;

2. para todo i y para todo j, $1 \leqq i, j \leqq r$, si $i \neq j$, entonces $S'_i \cap S'_j = \phi$.

Es decir, los conjuntos $S'_1, S'_2, \ldots, S'_r$ constituyen una partición de S si y sólo si cada elemento de S está presente en un y sólo en un S'_i

Si $S = \{a, b, c\}$, los conjuntos $\{a\}$ y $\{b, c\}$ constituyen una partición de S; $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$ también la constituyen, pero $\{a\}$ y $\{a, b\}$ *no.*

2. Relaciones y funciones.

2.1. *Introducción.*

Sea S un conjunto y S^2 el producto de S por sí mismo; supongamos que R es un subconjunto de S^2:

$$R \subset S^2$$

decimos entonces que R *es una relación definida sobre* S.

Una relación es, por tanto, un conjunto de pares. Si a y $b \in S$, entonces $(a, b) \in R$ o $(a, b) \notin R$; cuando $(a, b) \in R$ se dice que el par (a, b) verifica la relación R. Con frecuencia, en lugar de $(a, b) \in R$ se escribe

$$a \; R \; b.$$

En general, las relaciones son tratadas de esta forma. Por ejemplo,

R es una relación de igualdad: $a = b$

R es un orden parcial: $a \geqq b$

R es la relación ortogonal entre las líneas rectas a y b:

$$a \perp b; \text{ etc.}$$

La inclusión es una relación definida sobre el conjunto de partes de un conjunto. Si $S = \{a, b, c\}$, el conjunto $\mathfrak{p}(S)$ de partes de S consistirá de $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ $\{a, b\}$, etc. En $[\mathfrak{p}(S)]^2$ tenemos una relación de inclusión; por ejemplo,

$$\{a\} \subset \{a, b\}.$$

La relación ha sido definida como un subconjunto del producto de un conjunto por sí mismo; aunque es éste el caso más frecuente, no es sin embargo el único. En general, si S y S' son conjuntos,

$$R \subset SS'$$

es una relación. Si $S = S'$ tenemos el caso anterior, pero igualmente podría ser $S \neq S'$.

Por ejemplo, el símbolo $\in$, que indica que un elemento pertenece a un conjunto, denota una relación entre los elementos de un conjunto S y el conjunto $\mathfrak{p}(S)$ de partes de S.

Una relación R definida sobre un conjunto S, $R \subset S^2$, puede tener varias propiedades; entre otras, las siguientes:

Reflexividad. Todos los pares de la diagonal de S^2 pertenecen a R: para todo $a \in S$, $(a, a) \in R$ o aRa.

Simetría. $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$.

Antisimetría. Si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$.

Transitividad. $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Algunos tipos importantes de relación se definen sobre la base de estas propiedades.

Relación de ordenación débil. La relación R es una ordenación débil si es transitiva y reflexiva. Cuando una ordenación débil es simétrica tenemos una relación de equivalencia; y cuando es antisimétrica, una relación de orden.

2.2. *Relación de equivalencia.*

Ejemplos. La relación de igualdad es una relación de equivalencia; efectivamente:

$a = a$ (reflexividad)

$a = b \Leftrightarrow b = a$ (simetría)

$a = b$ y $b = c \Rightarrow a = c$ (transitividad)

La relación entre líneas rectas "ser paralela o coincidente" es una relación de equivalencia que se representa por $\|$. Efectivamente, si d, d' y d'' son líneas rectas, entonces

$d \| d$ (reflexividad, puesto que una línea recta coincide consigo misma)

$d \| d' \Leftrightarrow d' \| d$ (simetría evidente)

$d \| d'$ y $d' \| d'' \Rightarrow d \| d''$ (transitividad)

La transitividad no es evidente en este caso; sabemos que dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí; es decir,

$$d \| d' \text{ y } d'' \| d' \Rightarrow d \| d'',$$

que *no es* transitividad; pero utilizando la simetría es posible reemplazar en la última expresión $d'' \| d'$ por $d' \| d''$ y conseguir la transitividad.

La relación de similitud entre individuos *no es* una relación de equivalencia. Podemos encontrar reflexividad (Pedro se parece a sí mismo) y simetría (si Pedro se parece a Pablo entonces Pablo se parece a Pedro), pero generalmente no hay transitividad. Pedro se parece a Pablo (porque tienen un semblante parecido), Pablo se parece a Jaime (porque tienen ojos semejantes), pero Pedro y Jaime no tienen nada en común y no se parecen el uno al otro.

Clases de equivalencia. Si R es una clase de equivalencia definida sobre un conjunto S, denotaremos por $R(a) = \{x \mid x \in S,\ (a, x) \in R\}$ el conjunto de elementos de S que son equivalentes a a. Nótese que $a \in R(a)$ puesto que $(a, a) \in R$ (reflexividad). Por la simetría y transitividad de R se puede mostrar que

$$x \in R(a) \text{ y } y \in R(a) \Rightarrow (x, y) \in R.$$

Efectivamente,

$$x \in R(a) \Rightarrow (a, x) \in R \Rightarrow (x, a) \in R.$$

y $$y \in R(a) \Rightarrow (a, y) \in R;$$

pero $$(x, a) \in R \text{ y } (a, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R.$$

De lo cual se sigue que

$$(a, b) \in R \Rightarrow R(a) = R(b).$$

Tal conjunto se llama *clase de equivalencia.* Como ya se mostró, la definición de una clase de equivalencia es independiente del elemento a del que partimos. Si partimos de un elemento b equivalente a a, obtenemos la misma clase de equivalencia.

Sea S un conjunto con una relación de equivalencia R; tomemos un elemento a de S; obtenemos entonces la clase de equivalencia $C_1 = R(a)$. Tomemos ahora un elemento $b \notin C_1$, siendo $C_2 = R(b)$; tomemos de nuevo un elemento $c \notin C_1 \cup C_2$ y sea $C_3 = R(c)$; en general será

$$C_i = R(x) \qquad \text{con} \qquad x \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j .$$

Algunas de estas clases pueden consistir de un solo elemento; el número de clases C_i es finito dado que S mismo es finito.

TEOREMA 1.1. *El conjunto de clases de equivalencia constituye una partición de S.*

El hecho de que un elemento x de S no pertenezca a ninguna clase de equivalencia significa que el proceso descrito no es completo y que podemos definir una clase $C_j = R(x)$; entonces, una vez completado el proceso de construcción, tenemos:

$$\bigcup_i C_i = S.$$

Por otra parte, dos clases distintas cualesquiera, C_i y C_j, son disyuntas: $C_i \cap C_j = \phi$. Pues si tuviéramos que $x \in C_i \cap C_j$, esto llevaría consigo que

$$x \in C_i \Rightarrow R(x) = C_i$$

y $$x \in C_j \Rightarrow R(x) = C_j.$$

Por consiguiente sería $C_i = C_j$, resultando coincidentes estas clases.

2.3. *Relación de orden.*

Ejemplo. La relación de inclusión entre las partes de un conjunto es una relación de orden; efectivamente,

$$S \subset S$$

(reflexividad: cualquier elemento de S es un elemento de S);

$$S \subset S' \quad \text{y} \quad S' \subset S'' \Rightarrow S \subset S''$$

(transitividad; ver fig. 1.6); y

$$S \subset S' \quad \text{y} \quad S' \subset S \Rightarrow S = S'$$

(antisimetría: todo elemento de S es un elemento de S' y todo elemento de S' es un elemento de S; por tanto S y S' tienen los mismos elementos).

Sin embargo la relación de inclusión *estricta* no es una relación de orden, porque no es reflexiva.

Se puede ver fácilmente, considerando la propiedad de antisimetría, que una relación R sobre un conjunto S *induce* una relación de equivalencia R^* sobre este mismo conjunto:

$$(a, b) \in R^* \text{ si y sólo si } (a, b) \in R \quad \text{y} \quad (b, a) \in R$$

Sea C el conjunto de clases de equivalencia definidas por R^* sobre S,

$$C = \{C_1, C_2, \ldots\},$$

define una relación R' entre los elementos de C, es decir, entre las clases de equivalencia: $(C_i, C_j) \in R'$ si y sólo si podemos encontrar un $a \in C_i$ y un $b \in C_j$ tales que $(a, b) \in R$.

TEOREMA 1.2. *Si* $(C_i, C_j) \in R'$, *entonces para todo* $x \in C_i$ *y para todo* $y \in C_j$, $(x, y) \in R$.

Efectivamente,

$$x \in C_i \quad \text{y} \quad a \in C_i \Rightarrow (x, a) \in R^* \Rightarrow (x, a) \in R;$$
$$y \in C_j \qquad b \in C_j \Rightarrow (b, y) \in R^* \Rightarrow (b, y) \in R;$$

pero $(a, b) \in R$; de aquí que

$$(x, b) \in R \text{ y } (a, b) \in R \Rightarrow (x, b) \in R,$$

y

$$(x, b) \in R \text{ y } (b, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R.$$

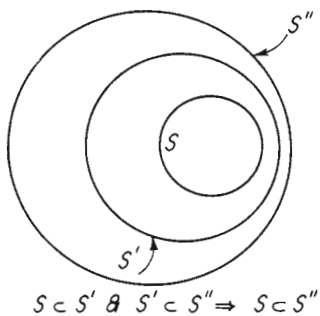


FIGURA 1.6.

TEOREMA 1.3. R' *es una relación de orden sobre las clases de equivalencia.*

En efecto, si $a \in C_i$, $b \in C_j$ y $c \in C_k$, entonces

$$(a, a) \in R \text{ y } (C_i, C_i) \in R' \qquad \text{(reflexividad);}$$

$$[(C_i, C_j) \in R' \text{ y } (C_j, C_i) \in R'] \Rightarrow [(a, b) \in R \text{ y } (b, a) \in R]$$
$$\Rightarrow [(a, b) \in R^*]$$
$$\Rightarrow [C_i = C_j] \qquad \text{(antisimetría);}$$

$$[(C_i, C_j) \in R' \text{ y } (C_j, C_k) \in R'] \Rightarrow [(a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in R]$$
$$\Rightarrow [(a, b) \in R]$$
$$\Rightarrow [(C_i, C_k) \in R'] \qquad \text{(transitividad).}$$

2.4. *Función.*

Una función que aplica un conjunto A en un conjunto B es una relación definida sobre el producto $A \times \mathfrak{p}(B)$, tal que para cada elemento a de A hay un elemento B' de $\mathfrak{p}(B)$ y sólo uno que verifica la relación. De hecho una función puede ser reducida a una relación R entre A y B. Se define (como previamente se hizo con respecto a las clases de equivalencia) para todo $a \in A$:

$$R(a) = \{ b \mid b \in B,\ (a, b) \in R \}.$$

Es obvio que $R(a)$ es parte de B, es decir, elemento de $\mathfrak{p}(B)$. La función se establece entre cada elemento a de A y los elementos $R(a)$ de $\mathfrak{p}(B)$.

Generalmente una función se representa por una mayúscula griega: $\Gamma, \Delta, \Phi, \ldots$

La parte de B que corresponde a a por la función Γ se denomina *imagen* de $a \in A$ y se representa simbólicamente por Γa. Si una relación R se asocia a Γ, como en el caso anterior, entonces $\Gamma a = R(a)$.

En realidad podemos hablar de una función o de una relación indiferentemente y sin riesgo de error.

Si A' es una parte de A y Γ es una función que aplica A en B, definimos

$$\Gamma A' = \bigcup_{a \in A'} \Gamma a.$$

La función Γ^-, inversa de Γ, es una función que aplica B en A; se define por

$$\Gamma^- b = \{ a \mid a \in A,\ b \in \Gamma a \}.$$

Al igual que una relación, una función Γ puede definirse sobre un único conjunto S: si $x \in S$, entonces $\Gamma x \in \mathfrak{p}(S)$.

Podemos considerar entonces:

$$\Gamma^2 x = \Gamma(\Gamma x) = \bigcup_{y \in \Gamma x} \Gamma y;$$
$$\Gamma^3 x = \Gamma(\Gamma^2 x);$$
$$\Gamma^k x = \Gamma(\Gamma^{k-1} x).$$

Si tenemos dos funciones, Γ y Δ, definidas sobre el mismo conjunto S, podemos obtener los productos:

$$\Gamma\Delta = \Gamma(\Delta x) = \bigcup_{y \in \Delta x} \Gamma y;$$

y $$\Delta\Gamma x = \Delta(\Gamma x) = \bigcup_{y \in \Gamma x} \Delta y;$$

en general: $\Gamma\Delta \neq \Delta\Gamma$.

2.5. *Tabla de una función o de una relación.*

Examinemos la tabla del producto cartesiano de dos conjuntos A y B (siendo $B \neq A$ o $B = A$). Sabemos que para cada casilla hay un par (a, b), tal que $a \in A$ y $b \in B$; sin embargo no tiene ninguna ventaja incluir cada par en la correspondiente casilla. Puesto que una relación R es un subconjunto de un producto AB, puede representarse escribiendo el signo más (+), por ejemplo, en las casillas correspondientes a los pares que verifican la relación R. Sea $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{x, y, z\}$ y $R = \{ (a, y) , (a, z) , (b, x) , (b, z) \}$; la tabla que se obtiene es:

B =

A =	x	y	z
a		+	+
b	+		+
c			

Se puede ver de forma inmediata en esta tabla:

$$R(a) = \{y, z\}; \; R(b) = \{x, z\}; \; R(c) = \phi.$$

Puede considerarse que esta tabla representa también la aplicación de A en B; muestra, por ejemplo, que

$$\Gamma a = \{y, z\}, \quad \Gamma b = \{x, z\},$$
$$\Gamma \{a, b\} = \{x, y, z\}, \quad \Gamma - z = \{a, b\}, \text{ etc.}$$

3. CONJUNTOS ORDENADOS; LATICIAS.

3.1. *Conjuntos ordenados.*

Sea S un conjunto con una relación de orden R; S es denominado entonces conjunto ordenado.

Si a y $b \in S$ y $(a, b) \in R$, escribimos

$$a \geqq b,$$

que se lee: a es mayor o igual a b; lo cual no significa necesariamente que a es un número mayor que b; puede indicar que una persona a tiene prioridad sobre otra persona b, o que la palabra a precede en determinado texto a la palabra b, etc.

Dos elementos a y b de S son *comparables* si se da que $a \geqq b$ o $b \geqq a$ o ambos casos; de lo contrario son incomparables. Si todos los elementos de S, tomados

de dos en dos, son comparables, entonces S *es un conjunto completamente ordenado.*

Si $a \geqq b$ pero no $b \geqq a$, se puede escribir $a > b$, que se lee: a es *estrictamente* mayor que b ($>$ no es propiamente una relación de orden, puesto que no hay relexividad; decimos que es un *orden estricto*).

Si $a > b$ y si no existe elemento alguno c en S, tal que $a > c$ y $c > b$, se dice entonces que a *cubre* b.

Si en S no hay ningún elemento estrictamente mayor que $a \in S$, a es un elemento *máximo* de S; si en S no hay ningún elemento estrictamente menor que $b \in S$, b es un elemento *mínimo* de S.

3.2. *Representación de un conjunto ordenado.*

Frecuentemente conviene representar gráficamente un conjunto ordenado. Para ello tomamos todos los elementos mínimos de S y los representamos por medio de puntos (geométricos) dispuestos horizontalmente *en la parte inferior* del gráfico; después, horizontal e inmediatamente encima, disponemos los elementos de forma que todos los demás que cada uno cubre han quedado representados en un nivel inferior, siguiendo así hasta el final.

A continuación dibujamos una línea entre dos elementos si y sólo si uno de ellos cubre al otro.

Tomemos un conjunto $S = \{ a, b, c, d, e, f \}$ con una relación de orden cuya tabla es la siguiente:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	+		+			
b		+				
c			+			
d		+		+		
e		+			+	
f		+	+	+	+	+

Tal tabla da la representación de la figura 1.7.

Obsérvese que f es mayor que b; sin embargo f no cubre a b; por consiguiente no hay línea entre b y f en la figura. No obstante el hecho $(f > b)$ puede ser deducido en el gráfico, de las líneas (fd) y (db) (o (fe) y (eb)), las cuales expresan que $f > d$ y $d > b$ y, por tanto, $f > b$ en virtud de la transitividad.

La disposición horizontal inferior en el gráfico es el nivel cero; la siguiente, el nivel 1; etc.; los niveles están indicados en la figura 1.7.

Puede verificarse fácilmente que si S es un conjunto completamente ordenado hay un único elemento en cada nivel, como en la figura 1.8; el gráfico parece enton-

ces una *cadena* o una línea. Por esto se dice de un conjunto completamente ordenado que está ordenado *linealmente.*

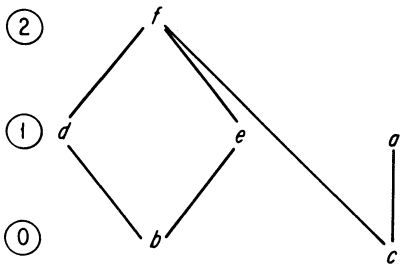


FIGURA 1.7.

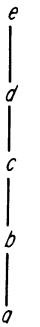


FIGURA 1.8.

3.3. *Laticias.*

Sea S un conjunto ordenado. Un elemento a de S es el *límite superior* de $S' \subset S$ si todos los elementos de S' son menores o iguales que a y si no existe ningún $a' \in S$ menor que a que tenga esta propiedad. El *límite inferior* de S' se define de modo análogo.

Un conjunto ordenado finito es una laticia si y sólo si cada una de sus partes posee un límite superior y un límite inferior.

La figura 1.7 *no* representa una laticia, mientras que la figura 1.8 sí.

Nos interesarán aquí sólo los conjuntos ordenados de un tipo especial: *el conjunto de partes de un conjunto, ordenado por la relación de inclusión.*

Sea $S = \{a, b, c\}$ un conjunto; entonces

$$\mathfrak{p}(S) = \{\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\},\ \{a, b, c\}\}.$$

El conjunto $\mathfrak{p}(S)$ es una *laticia:* el límite superior de un subconjunto de partes es su unión; el límite inferior es su intersección.

La figura 1.9 ofrece una representación de la laticia $\mathfrak{p}(S)$.

Deben examinarse algunas propiedades de una laticia $\mathfrak{p}(S)$.

Si S' cubre S'' y S''' entonces $S' = S'' \cup S'''$; por ejemplo, $\{b, c\}$ cubre $\{b\}$ y $\{c\}$. Si S' es cubierto por S'' y S''' a la vez, entonces $S' = S'' \cap S'''$; por ejemplo, $\{c\}$ es cubierto por $\{a, c\}$ y $\{b, c\}$.

4. DISTANCIAS EN UN CONJUNTO.

Definimos una *distancia* en un conjunto S si a cada par (a, b) de S se puede asociar un número $d(a, b)$ con las siguientes propiedades:

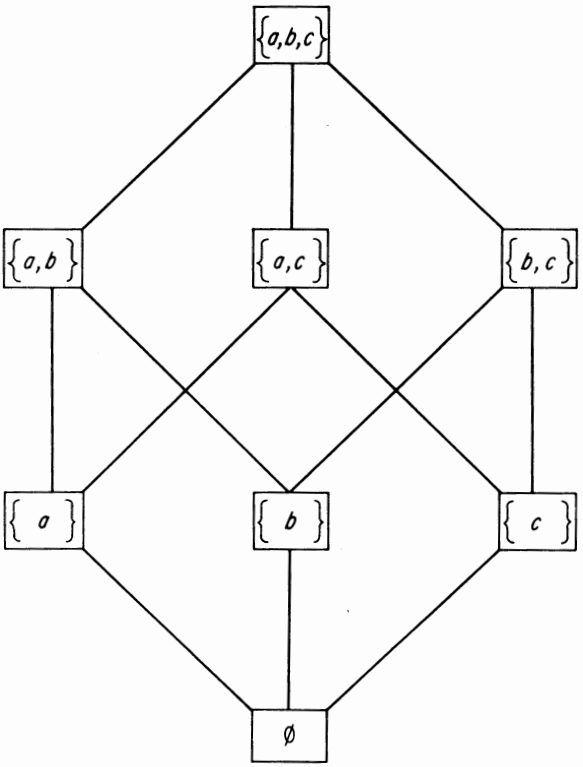


FIGURA 1.9.

1. $d(a, b) \geqq 0$, y $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$;
2. $d(a, b) = d(b, a)$;
3. $d(a, b) + d(b, c) \geqq d(a, c)$.

La noción matemática de distancia no siempre coincide con la noción común. Se puede hablar, por ejemplo, de la distancia cubierta en el desplazamiento de un lugar a otro en una ciudad; sin embargo, a causa de la existencia de calles de dirección única, el itinerario de a a b puede ser diferente del de b a a y ambos pueden tener una longitud distinta; la segunda propiedad no se da en este caso.

Por otra parte, no es evidente de forma inmediata que la potencia de la diferencia simétrica de dos conjuntos sea una distancia; matemáticamente, en cambio, sí es una distancia, resultando verdaderamente útil esta noción en las ciencias sociales (ver, por ejemplo, Restle, 1959 y 1961). Examinemos este tipo de distancia.

Dados los conjuntos S_i $(i = 1, 2, ..., r)$, establecemos que

$$d(S_i, S_j) = |S_i \oplus S_j|;$$

$d(S_i, S_j)$ es el número de elementos de S_i que no pertenecen a S_j más el número de elementos de S_j que no pertenecen a S_i.

Puesto que $d(S_i, S_j)$ es la potencia de un conjunto, es un número positivo o cero si el conjunto es vacío; en este caso, todos los elementos de S_i pertenecen a S_j y todos los elementos de S_j pertenecen a S_i, es decir, $S_i = S_j$. Se da, pues, la primera propiedad.

La diferencia simétrica es una operación conmutativa; por consiguiente:

de aquí que $$(S_i \oplus S_j) = (S_j \oplus S_i),$$

$$d(S_i, S_j) = |S_i \oplus S_j| = |S_j \oplus S_i| = d(S_j, S_i).$$

También se cumple la segunda propiedad.

Para encontrar la tercera propiedad utilicemos los círculos de Euler que representan las relaciones entre los tres conjuntos S_i, S_j, S_k (fig. 1.10).

Tenemos que

$$S_i \oplus S_j = \{3, 4, 5, 6\},$$

$$S_i \oplus S_k = \{2, 3, 5, 7\},$$

y $$S_j \oplus S_k = \{2, 4, 6, 7\},$$

por tanto $$d(S_i, S_j) = |3| + |4| + |5| + |6|,$$

$$d(S_i, S_k) = |2| + |3| + |5| + |7|,$$

y $$d(S_j, S_k) = |2| + |4| + |6| + |7|,$$

Esto da $$d(S_i, S_j) + d(S_j, S_k) = |2| + |3| + 2|4| + |5| + 2|6| + |7|,$$

y $$d(S_i, S_j) + d(S_j, S_k) + d(S_i, S_k) = 2(|4| + |6|) \geq 0.$$

de aquí que

$$d(S_i, S_j) + d(S_j, S_k) \geq d(S_i, S_k).$$

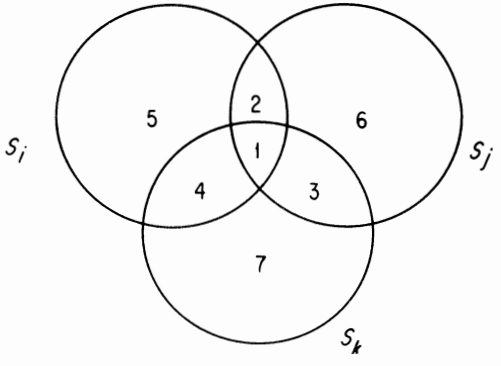


FIGURA 1.10.

TEOREMA 1.4.

$$d(S_i, S_j) = d[S_i, (S_i \cup S_j)] + d[(S_i \cup S_j), S_j]$$
$$= d[S_i, (S_i \cap S_j) + d[(S_i \cap S_j), S_j].$$

Prueba. Se mostró en la definición de la diferencia simétrica de dos conjuntos A y B, que $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$. Por consiguiente

$$S_i \oplus (S_i \cup S_j) = [S_i - (S_i \cup S_j)] \cup [(S_i \cup S_j) - S_j];$$

pero $S_i - (S_i \cup S_j) = \phi$

y $(S_i \cup S_j) - S_j = S_i - S_j;$

por tanto $S_i \oplus (S_i \cup S_j) = S_i - S_j;$

similarmente:

$$(S_i \cup S_j) \oplus S_j = S_j - S_i$$

Los conjuntos $(S_i - S_j)$ y $(S_j - S_i)$ son evidentemente disyuntos; en consecuencia, la potencia de su unión es la suma de sus potencias.

$$|(S_i - S_j) \cup (S_j - S_i)| = |S_i - S_j| + |S_j - S_i|;$$

pero $(S_i - S_j) \cup (S_j - S_i) = S_i \oplus S_j;$

de aquí que $|S_i - S_j| = |S_i - S_j| + |S_j - S_i|$

$$= |S_i \oplus (S_i \cup S_j)| + |(S_i \cup S_j) \oplus S_j|$$

y $d(S_i, S_j) = d[S_i, (S_i \cup S_j)] + d[(S_i \cup S_j), S_j].$

Del mismo modo podemos mostrar la segunda igualdad del teorema. Estas demostraciones se pueden visualizar en los círculos de Euler que aparecen en la figura 1.10.

TEOREMA 1.5. *Si S_i y S_j son dos partes de S, la distancia $d(S_i, S_j)$ es igual al número de líneas que constituyen el camino más corto desde S_i a S_j en la representación gráfica de la laticia* $\mathfrak{p}(S)$.

Prueba. Un elemento S' cubre un elemento S'' en la laticia $\mathfrak{p}(S)$ si y sólo si $S'' \subset S'$ y $|S' - S''| = 1$ (ver figura 1.11); por consiguiente, se puede asociar a cada línea del gráfico de $\mathfrak{p}(S)$ un elemento de S: asociamos a la línea $(S'\ S'')$ el elemento que constituye $(S \oplus S'')$ (fig. 1.11). Se puede mostrar fácilmente que de cada punto de $\mathfrak{p}(S)$ parten n líneas si S tiene n elementos ($|S| = n$), de forma que cada elemento de S está asociado a una de estas líneas.

Tomemos ahora los elementos de $(S' \oplus S'')$ en un orden cualquiera: $x_1, x_2, \ldots$. Si, por ejemplo, $S_i = \{a\}$ y $S_j = \{b, c\}$, obtenemos b, c, a.

Partimos de S_i por la línea asociada al primer elemento de $(S_i \oplus S_j)$; alcanzando el elemento $S_i \cup \{x_1\}$ si $x_1 \in (S'j - S'i)$ o $S_i - \{x_1\}$ si $x_1 \in (S_i - S_j)$; a partir de este elemento utilizamos la línea asociada a x_2, etc. De este modo llegamos a S_j en un número de pasos igual a $|S_i \oplus S_j|$, es decir, igual a $d(S_i - S_j)$. Este camino es en efecto el más corto (o uno de los más cortos); si hubiera un camino más corto correspondería éste a un conjunto de elementos de S en el que no figuraría un x_i de $(S_i \oplus S_j)$ por lo menos; pero si este elemento fuera eliminado de S_i o no estuviera unido a S_i, no se llegaría a S_j.

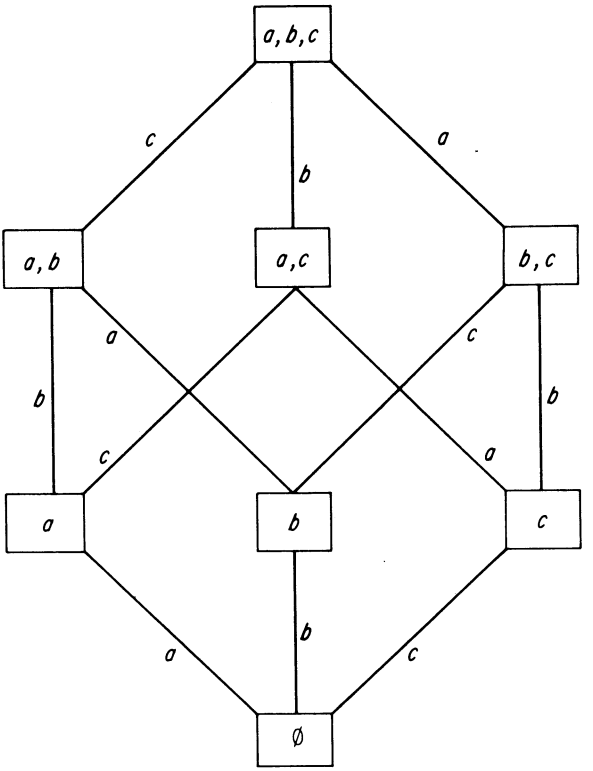


FIGURA 1.11.

En el ejemplo anterior ($S_i = \{a\}$ y $S_j = \{b, c\}$) se puede seguir el camino *b, c, a:* $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\{b, c\}$; o el camino *a, b, c:* $\{a\}$, ϕ, $\{b\}$, $\{b, c\}$, etc. Fig. 1.11).

5. GRAFOS Y CAMINOS DE UN GRAFO.

5.1. *Introducción.*

Si tomamos un conjunto X y una función Γ sobre este conjunto, obtenemos un *grafo* G, que puede representarse por

$$G = (X; \Gamma).$$

A veces distinguimos el conjunto V de pares de X^2 tales que x e $y \in X$ e $y \in \Gamma x$; en este caso escribimos $G = (X; V)$. Puesto que podemos pasar fácilmente de Γ a V y de V a Γ, ambas nociones resultan equivalentes.

Cualquier elemento de V es un *arco* del grafo.

Los elementos de X son los *puntos* del grafo.

La correspondencia Γ puede tener propiedades interesantes que definen grafos especiales.

Grafo simétrico: para cualquier x e $y \in X$, tenemos que

$$(x, y) \in V \Leftrightarrow (y, x) \in V.$$

Grafo transitivo:

$$(x, y) \in V \text{ y } (y, z) \in V \Rightarrow (x, z) \in V.$$

Grafo completo: para cualquier x e $y \in X$, se da que

$$\text{o } (x, y) \in V \text{ o } (y, x) \in V \text{ o ambos.}$$

Grafo reflexivo: para cualquier x e $y \in X$.

$$(x, x) \in V;$$

tal arco (x, x) se denomina *loop* (bucle).

Tales términos y notaciones nos son ya familiares: un grafo simétrico corresponde a una relación simétrica; un grafo transitivo completo, a una relación de orden completa; etc. En realidad, la teoría de los grafos y la teoría de las relaciones son en cierto modo similares. Aunque estas dos teorías resultan más o menos útiles en dependencia de sus aplicaciones; quizás la teoría de relaciones es más útil para el estudio de relaciones especiales (equivalencia, orden); la teoría de grafos es más útil sin duda alguna para el estudio de *relaciones arbitrarias.*

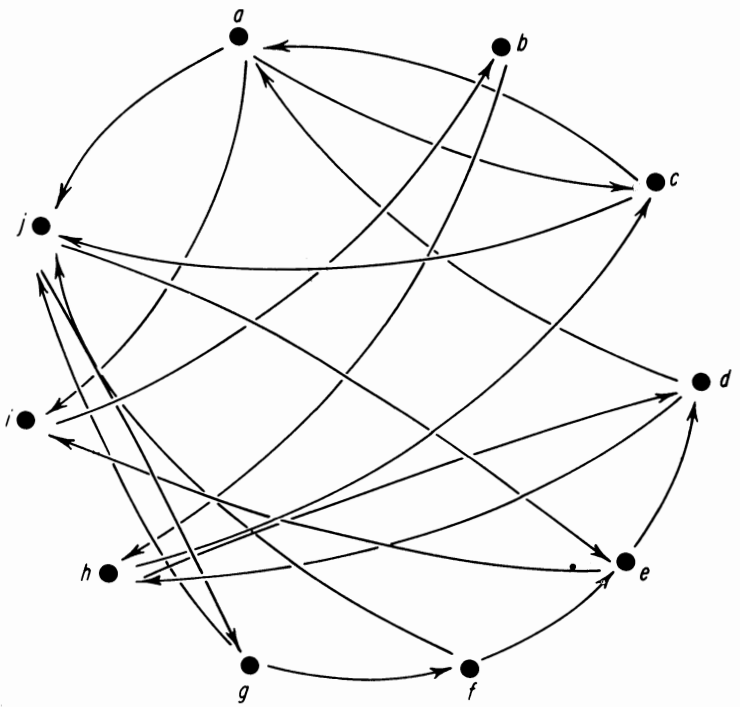


FIGURA 1.12.

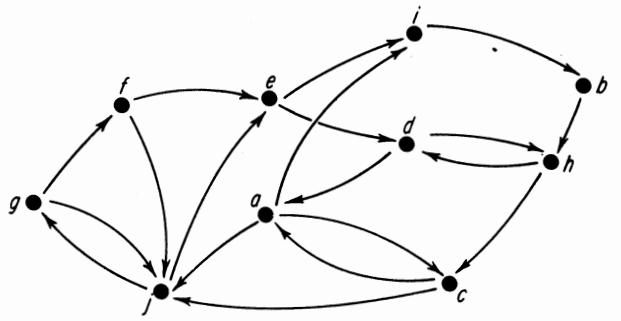


FIGURA 1.13

5.2. *Representación de un grafo.*

Sea $G = (X\,;\,\Gamma) = (X\,;\,V)$ un grafo; puede representarse por un diagrama de la siguiente manera. Los elementos de X se representan por puntos (geométricos) *dispuestos de modo completamente arbitrario.* Se traza una *flecha* de x a y si y sólo si $(x, y) \in V$. Las figuras 1.12 y 1.13 constituyen ejemplos. Los grafos que representan son verdaderamente idénticos; la disposición de puntos es la única diferencia y carece de significado. Sin embargo, una "buena" disposición facilita la comprensión del diagrama, cuestión de mera conveniencia sin relevancia teórica alguna.

5.3. *Matriz asociada a un grafo.*

Ya hemos visto cómo asociar una tabla a una relación; el principio aquí es exactamente el mismo. Si G tiene $n = |X|$ puntos formamos una matriz (o tabla) de n filas y n columnas. A la i-ésima fila asociamos el punto $x_i \in X$; a la j-ésima columna, el punto $x_j \in X$. Dentro de las casillas los elementos de la matriz son denotados por g_{ij}; póngase $g_{ij} = 1$ si $(x_i, x_j) \in V$ y $g_{ij} = 0$ si $(x_i, x_j) \notin V$.

Si G denota un grafo, nos referiremos a su matriz asociada con $||G||$. La matriz asociada al grafo de la figura 1.13 es la que se ofrece en la página siguiente. (Por razones tipográficas se suelen omitir los ceros en estas matrices).

Se comprobará que la matriz asociada a un grafo facilita el estudio de algunas propiedades del grafo. De hecho puede ser ya utilizada para establecer las siguientes definiciones:

El *grado de emisión* o *semigrado externo* de un punto $x_i \in X$ es

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\ ;$$

éste es el número de arcos que *parten de* x_i ; por ejemplo, $d^+(a) = 3$.

El *grado de recepción* o *semigrado interno* de un punto $x_j \in X$ es

$$d^-(x_j) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\ ;$$

éste es el número de arcos que inciden en x_j ; por ejemplo, $d^-(a) = 2$.

Aplicaciones. Se realiza un test en un grupo social; cada miembro del grupo selecciona a algunos (quizás a ninguno) de sus compañeros. Llamamos X al conjunto de miembros del grupo (cada individuo es un elemento de X) y decimos que $(x, y) \in V$ si y sólo si x elige a y. $G = (X; V)$ es el *sociograma;* $\|G\|$ es la sociomatriz; $d^+(x)$ mide el grado de expansividad sociométrica de x; y $d^-(x)$, la popularidad o status sociométrico de x. (Obsérvese que un sociograma es un grafo sin loops puesto que un miembro no se puede elegir a sí mismo).

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a			1						1	1
b								1		
c	1									1
d	1							1		
e				1					1	
f					1					1
g						1				1
h			1	1						
i		1								
j					1		1			

5.4. *Subgrafos, grafos parciales y grafos reducidos.*

Subgrafo. Sea $G = (X; \Gamma) = (X; V)$ un grafo. $G' = (X'; \Gamma) = (X'; V')$ es un *subgrafo* de G si

$$X' \subset X$$

y si

$$x \in X' : \Gamma X' = \Gamma x \cap X';$$

o, si se prefiere, $(x, y) \in V'$, si y sólo si $(x, y) \in V$ y x e $y \in X'$. Planteado de otro modo: ciertos puntos y los arcos que parten de ellos, o en ellos inciden, son excluidos de X. Se obtiene la matriz $\|G'\|$ eliminando de la matriz $\|G\|$ las filas y columnas correspondientes a los puntos de $X - X'$. El grafo de la figura 1.14 es un subgrafo de la figura 1.13. Su matriz asociada es la siguiente.:

	a	*b*	*c*	*d*
a			1	
b				
c	1			
d	1			

Grafo parcial. $G' = (X' ; V')$ es un *grafo parcial* de $G = (X ; V)$ si

$$X' = X \quad \text{y} \quad V' \subset\subset V.$$

Se mantienen todos los puntos de G, quedando excluidos algunos de sus arcos. $||G'||$ se obtiene poniendo cero en algunas de las casillas de $||G||$ en las que no figura cero. El grafo de la figura 1.15 es un grafo parcial del de la figura 1.13.

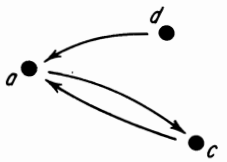


FIGURA 1.14.

Uniendo las nociones de subgrafo y grafo parcial se puede obtener la noción de *subgrafo parcial:* subgrafo de grafo parcial o grafo parcial de un subgrafo. El grafo de la figura 1.16 es un subgrafo parcial del de la figura 1.13.

Reducción de un grafo. Sea $G = (X ; \Gamma)$ un grafo; defínase sobre X una partición $X_1, X_2, ..., X_r$, tal que

$$\bigcup_{i=1}^{r} X_i = X \quad \text{y} \quad X_i \cap X_j = \phi$$

para todo $i, j = 1, 2, ..., r$. Sea $X^0 \quad \{X_1, X_2, ..., X_r\}$ el conjunto de partes así definido y sea Γ^0 sobre X_0 una función definida por: $(X_i, X_j) \in \Gamma^0$ si y sólo si existe un punto $x \in X_i$ y un punto $y \in X_j$, tales que $(x, y) \in \Gamma$. El grafo $G^0 = (X^0 ; \Gamma^0)$ es un *grafo reducido* del grafo G. La figura 1.17 presenta un grafo G y el grafo reducido G^0 de G.

Evidentemente se pueden obtener muchos grafos reducidos de un grafo. El interés de tal operación depende de las propiedades de partición de los puntos del grafo. Específicamente, la reducción de un grafo obtenido por una partición resultante de una relación de equivalencia sobre los puntos del grafo puede revelar fenómenos desconocidos.

Ejemplo. Un grafo representa un cierto tipo de relación entre los miembros de una empresa, la partición del conjunto de puntos se realiza sobre la base de si pertenecen, o no, a los varios departamentos de la empresa.

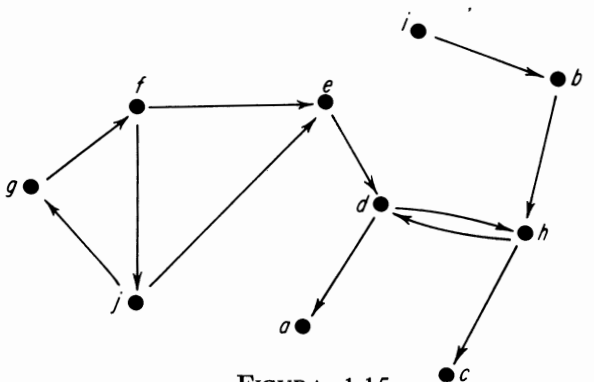


FIGURA 1.15.

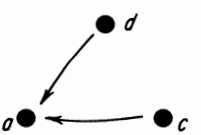


FIGURA 1.16.

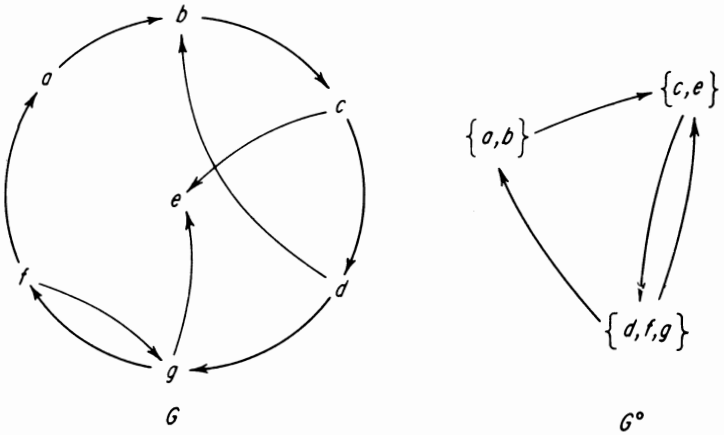


FIGURA 1.17.

5.5. *Caminos de un grafo.*

Se denomina *camino* de un grafo $G = (X\,;\, V)$ al subconjunto completamente ordenado V' de V, tal que el k-ésimo arco de V, termina en el punto de X del que parte el $(k+1)$-ésimo arco; si x es el origen del primer arco de V' e y es el término del último arco de V', el camino se puede representar por $\gamma(xy)$.

Ejemplo. Tomemos $V' = \{(j, e), (e, d), (d, a)\}$ en el grafo de la figura 1.15; obtenemos así el camino $\gamma(ja)$. Si se quiere especificar que el camino pasa por d, se puede escribir $\gamma(j \ldots da)$. Si se prefiere detallar todos los pasos del camino, entonces se escribe $\gamma(jeda)$.

Si el grafo representa una red de tráfico con sus calles de dirección única, se verifica que un camino representa efectivamente una posible ruta.

Un camino es *elemental* si nunca pasa dos veces por el mismo punto. En la figura 1.15 $\gamma(jeda)$ es un camino elemental, pero $\gamma(jedha)$ no.

Un *circuito* es un camino que vuelve a su punto de partida. En la figura 1.15, $\gamma(dhd)$ y $\gamma(gfjg)$ son circuitos. Evidentemente se puede seguir un circuito desde uno cualquiera de sus puntos:

$$\gamma(gfjg) = \gamma(fjgf) = \gamma(jgfj).$$

Cadenas y Ciclos. A veces resulta necesario analizar un grafo sin prestar atención a la dirección de sus flechas. Se puede decidir, por ejemplo, seguir un arco en la dirección de la flecha, o en la opuesta, indiferentemente. Esto lleva a una transformación del grafo en un grafo simétrico.

En tal caso se reemplaza el término *arco* por *arista,* el término *camino* por *cadena* y el término *circuito* por *ciclo.*

Por ejemplo, en el grafo de la figura 1.15, no tomamos el arco (e, j), sino la arista (e, j). La serie de arcos $(d, h), (b, h), (i, b)$ no constituye un camino, pero las

correspondientes aristas (d, h), (h, b) y (b, i) constituyen una cadena. Los arcos (f, e), (f, j), (j, e) no componen un circuito, pero las aristas (f, e), (e, j) y (j, f) componen un ciclo.

En un grafo no simétrico no hay necesariamente un camino dondequiera que hay una cadena; por el contrario, en un grafo simétrico corresponden siempre a una cadena dos caminos de dirección opuesta. (Las mismas relaciones se dan entre un circuito y un ciclo.)

Caminos y circuitos hamiltonianos. Un *camino hamiltoniano* es un camino elemental que pasa por todos los puntos del grafo. Un *circuito hamiltoniano* es un camino hamiltoniano que vuelve a su punto de partida.

El circuito (*acjgfeibhda*) es un circuito hamiltoniano.

Los caminos y circuitos hamiltonianos crean problemas engorrosos para la teoría de grafos (Camion, 1960; Flament, 1959a; Harary y Ross, 1954).

5.6. *Arborescencias y árboles.*

Un grafo $G=(X; V)$ es una *arborescencia* con *raíz* a si

1. todo punto $x \in X$, para $x \neq a$, tiene un grado de recepción igual a uno.
2. el grado de recepción de a es cero;
3. G no contiene ningún circuito.

Una arborescencia siempre resulta parecida al grafo de la figura 1.18.

Una arborescencia es un conjunto de caminos divergentes; se denominan *ramificaciones* los puntos cuyo grado de emisión es mayor que uno.

Si $G=(X; V)$ es una arborescencia, el número de arcos de G es $|V|=(n-1)$ cuando el número de puntos de G es $|X|=n$. Efectivamente, esto se deduce de la definición, conforme a la cual todos los puntos excepto uno (la raíz) reciben un solo arco.

La noción de árbol corresponde a la de arborescencia cuando no se toma en cuenta la dirección de los arcos, o si se prefiere, cuando el grafo considerado es simétrico.

Un árbol es un conjunto de aristas (en contraposición a arcos) que constituye un grafo con $(n-1)$ aristas (en contraposición a arcos) y sin ciclos (en contraposición a circuitos).

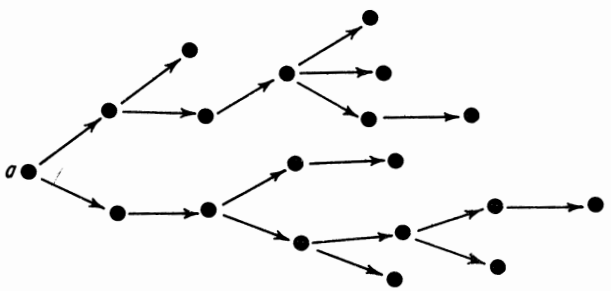


FIGURA 1.18.

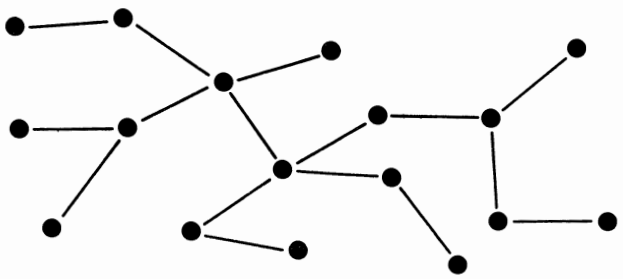


FIGURA 1.19.

Es evidente que una arborescencia constituye un árbol, mientras que la inversa no se da generalmente. Un árbol no tiene raíz o, mejor dicho, todo punto del árbol puede ser considerado como raíz, es decir, como punto de partida para seguir sucesivamente todas las cadenas del árbol.

La figura 1.19 representa un árbol.

6. LONGITUDES Y DESVIACIONES DE UN GRAFO.

6.1. *Introducción.*

La longitud de un camino γ es denotada por $l(\gamma)$ y se mide, por definición, por el número de arcos que constituyen el camino.

Desde un punto x a un punto y puede haber muchos caminos $\gamma_i(xy)$; la *desviación de* x *a* y es por definición,

$$e(xy) = \min_i \{ l[\gamma_i(xy)] \} .$$

Esta es la longitud del más corto camino de x a y.

Un camino $\gamma(xy)$, cuya longitud es igual a $e(xy)$ es una *pista* y se representa por $\theta(xy)$.

Generalmente la desviación no es una distancia.

Efectivamente, cuando el grafo no es simétrico, para ir de y a x nos vemos forzados con frecuencia a pasar por puntos distintos a los que utilizamos para ir de x a y; y no es necesario que las pistas $\theta(xy)$ y $\theta(yx)$ tengan la misma longitud. Por ejemplo, en el grafo de la figura 1.20 tenemos que:

$$e(ab) = 1 ,$$

es decir, la longitud de la pista $\theta(ab)$ es esclusivamente la del arco (a, b); por el contrario

$$e(ba) = 2 ,$$

es decir, la longitud de la pista $\theta(ba)$ se compone de los arcos (b, c) y (c, a). Para que sea $e(ba) = 1$ el arco (b, a) debería estar en el grafo, lo cual no sucede en este caso.

En un grafo simétrico, sin embargo, las desviaciones son distancias.
Cuando no existe camino de x a y, de modo convencional escribimos

$$e(xy) = \infty \text{ (infinito)}.$$

Generalmente se considera igual a cero la desviación de un punto respecto de sí mismo: $e(xx) = 0$. Esta convención, que es absolutamente normal, es sobre todo necesaria para que la desviación resulte una distancia en un grafo simétrico.

6.2. *Determinación de desviaciones.*

Existen varios métodos algorítmicos para computar la desviación de un punto a otro. Se han de utilizar métodos rigurosos para evitar los errores que se suelen producir por la simple inspección visual de un grafo, cuando éste es algo complejo. Estos métodos no son necesarios, por supuesto, cuando el grafo es tan simple como el que presenta la figura 1.20, en el cual pueden ser inmediatamente captados los caminos, pistas y desviaciones.

En primer lugar presentamos un método de *señalización* gráfica y a continuación un método matricial (utilizando la matriz asociada al grafo).

Método de señalización para computar las desviaciones de un punto a otros. Para obtener las desviaciones del punto $a \in X$ a todos los puntos de X en el grafo $G = (X; \Gamma)$, procedemos conforme a los pasos siguientes:

1. Señalamos con 0 (cero) el punto a.
2. Señalamos con k los puntos todavía no señalados que son parte de $(\Gamma^k x)$.
3. Cesamos cuando no hay más puntos, bien porque todos los puntos de X ya han sido señalados, o bien porque los puntos no señalados no pueden ser alcanzados desde aquéllos.
4. Si $y \in X$ está señalado con k, esto significa que $e(xy) = k$; si $y \in X$ no está señalado, entonces $e(xy) = \infty$.

Ejemplo. Considérese el grafo de la figura 1.20.

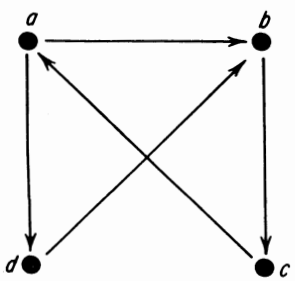


FIGURA 1.20.

El procedimiento se puede representar del modo siguiente:

$$\begin{array}{lccc} k = 0 & 1 & 2 \\ & \to b & \to c \\ a & & \\ & \to d & \end{array}$$

Deberíamos señalar después de d, en la columna 2, el punto b, puesto que (d, b) es un arco del grafo; sin embargo b está ya señalado. Después de c sólo está a, que ya está señalado. Por consiguiente el proceso ha concluido. Tenemos

$$e(ab) = e(ad) = 1; \quad e(ac) = 2 \quad .$$

Si también deseamos las desviaciones de d a otros puntos, obtenemos

$$k = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$
$$d \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$$

Matriz de desviación. Si tomamos las desviaciones de todos los puntos de X, las cifras computadas pueden ser registradas en la matriz de desviación, designada por $E(G)$ si G representa al grafo. En cada casilla (x, y) registramos las desviaciones $e(x\ y)$. En el caso de la figura 1.20, obtenemos

	a	b	c	d
a	0	1	2	1
b	2	0	1	3
c	1	2	0	2
d	3	1	2	0

Antes de discutir el método matricial al que antes aludíamos, conviene repasar algunos principios básicos de la teoría de matrices.

Teoría de matrices. Sea M una matriz con n filas y p columnas y de orden $(n \times p)$; el elemento de la casilla (ij) es m_{ij}.

Adición. Para poder sumar una matriz M y una matriz Q, deben tener el mismo orden; obtenemos entonces

$$M + Q = R$$

cuyos elementos son $r_{ij} = m_{ij} + q_{ij}$

Ejemplo.

M

1	0	3	2
0	2	1	1
4	−1	2	0

$+$

Q

−2	4	1	3
−3	−1	0	−1
2	1	0	2

$=$

R

−1	4	4	5
−3	1	1	0
6	0	2	2

Multiplicación. Para poder multiplicar dos matrices, el número de columnas de una de ellas deber ser igual al número de filas de la otra. Si el orden de M es $(n \times p)$ y el de Q es $(p \times t)$, podemos multiplicar M por Q: MQ, pero no Q por M: QM.

En el primer caso tenemos

$$R = MQ$$

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{p} m_{ik} \cdot q_{kj};$$

siendo $(n \times t)$ el orden de R.

Ejemplo.

$$M = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -2 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & -1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$R = MQ = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & -5 & -3 & -2 \\ \hline 6 & -3 & -9 & 0 \\ \hline 5 & 0 & -6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Para obtener el número 6 de la segunda fila, primera columna, de R, tomamos la segunda fila de M: 3 ; 0; y la primera columna de Q: 2 ; 1; multiplicando entonces término a término:

$$\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ \hline 6 & 0 \end{array}$$

De aquí que $6 + 0 = 6$.

Potencias de una matriz cuadrada. Si M es una matriz cuadrada, es decir, una matriz de orden $(n \times n)$, puede entonces ser multiplicada por sí misma con el fin de obtener su segunda potencia:

$$M^2 = MM$$

De modo similar definimos $M^r = M(M^{r-1}) = (M^{r-1})M$. Los elementos de M^r son denotados por $m_{ij}^{(r)}$.

Cuando aplicamos repetidamente la multiplicación obtenemos

$$m_{ij}^{(r)} = \sum_{k_1=1}^{n} \cdot \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_{r-1}=1}^{n} m_{ik_1} \cdot m_{k_1k_2} \cdots m_{k_{r-1}j}.$$

Ejemplo.

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad ; \quad M^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$M^3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad ; \text{etc.}$$

El método matricial para la computación de desviaciones.

TEOREMA 1.6 (Festinger, 1949). *El número de caminos, elementales o no, de* x_i *a* x_j, *cuya longitud es* r *en un grafo* G, *está dado por el elemento* $g_{ij}^{(r)}$ *de la* r*-ésima potencia de la matriz* $||G||$ *asociada a* G.

Prueba. Si hay en G un camino $\gamma(x_i\, x_j)$ de longitud r, es de la forma

$$(x_i\, x_{k_1})\,,\ (x_{k_1}\, x_{k_2})\,,\ \ldots\,,\ (x_{k_{r-1}}\, x_j)\,;$$

tenemos entonces en $||G||$:

$$g_{ik_1} = g_{k_1k_2} = \cdots = g_{k_{r-1}j} = 1\,,$$

siendo el producto de estos términos igual a uno. Pero este producto,

$$g_{ik_1} \cdot g_{k_1k_2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot g_{k_{r-1}j}\,,$$

es uno de los términos de $g_{ij}^{(r)}$. Por consiguiente, para cada camino $\gamma(x_i\, x_j)$ de longitud r, el valor correspondiente de $g_{ij}^{(r)}$ es igual a uno. Recíprocamente, si un término de $g_{ij}^{(r)}$ es igual a uno, corresponde a un camino; efectivamente si $g_{ik_1} \cdot g_{k_1k_2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot g_{k_{r-1}j} = 0$, entonces al menos un $g_{kk'}$ es igual a cero, lo cual significa que el arco $(x_k, x_{k'})$ falta en el correspondiente camino.

TEOREMA 1.7. *En un grafo* G *de* n *puntos, la longitud de un camino elemental es como máximo igual a* $(n-1)$.

Prueba. Un camino constituido por m arcos tiene evidentemente $(m+1)$ puntos, contando los puntos inicial y terminal. Puesto que un camino elemental no pasa dos veces por el mismo punto, el camino elemental más largo que se pueda imaginar en G pasa por todos los puntos de X una y sólo una vez. De aquí que este camino es de longitud $(n-1)$.

En estos teoremas se basa un algoritmo simple para la computación de desviaciones en un grafo G:

1. Se computan las sucesivas potencias de $||G||$ hasta la r-ésima, siendo $r = n-1$ y n el número de puntos de G.
2. La desviación $e(xy)$ es igual a la mínima potencia r de $||G||$, cuya casilla (xy) contiene un término $g_{xy}^{(r)}$ *distinto de cero.*
3. Si $g_{xy}^{(r)} = 0$ para cualquier $r \leqq n-1$, entonces $e(xy) = \infty$.
4. Para todo x, $e(xx) = 0$.

El ejemplo utilizado anteriormente para la computación de las potencias de una matriz corresponde al análisis del grafo de la figura 1.20. De él podemos deducir la siguiente matriz de desviación:

	a	*b*	*c*	*d*
a	0	1	2	1
b	2	0	1	3
c	1	2	0	2
d	3	1	2	0

Evidentemente se obtienen los mismos resultados que con el método de señalización, pero con la ventaja de que este método matricial se puede programar con facilidad para un computador (ver Ross y Harary, 1955).

6.3. *Determinación de pistas entre dos puntos.*

Recuérdese que una pista $\theta(xy)$ es un camino $\gamma(xy)$ de longitud igual a la desviación $e(xy)$.

TEOREMA 1.8. *El punto* z *está en la pista* $\theta(xy)$ si y sólo si

$$e(xz) + e(zy) = e(xy).$$

Prueba. Condición suficiente. Si $e(xz) + e(zy) = e(xy)$, considérese el camino $\gamma(xy)$ formado por las pistas $\theta(xz)$ y $\theta(zy)$; la longitud de este camino es $e(xy)$; por tanto es una pista $\theta(xy)$.

Condición necesaria. Un teorema formulado por Bratton (1955) (véase Berge, 1958, capítulo 13, teorema 5) establece que si $\theta(x \ldots x_i \ldots x_j \ldots y)$ es una pista, el camino $\gamma(x_i \ldots x_j)$ es una pista; si z es un punto en la pista $\theta(xy)$, los segmentos (xz) y (zy) de esta pista también son pistas, $\theta(xz)$ y $\theta(zy)$, siendo sus longitudes $e(xz)$ y $e(zy)$ respectivamente. De aquí que $e(xz) + e(zy)$ es la longitud de $\theta(xy)$.

TEOREMA 1.9. *Si* z *y* z' *pertenecen ambos a la pista* $\theta(xy)$, *entonces el arco* (z,z'), *si existe, pertenece a la pista* $\theta(xy)$ *si y sólo si* $e(xz) + 1 = e(xz')$.

Prueba. Condición suficiente. Considérese el camino formado por la pista $\theta(xz)$, el arco (z,z') y la pista $\theta(z'y)$. La longitud de esta camino $\gamma(xy)$ es

$$l[\gamma(xy)] = e(xz) + 1 + e(z'y).$$

Si $e(xz') = e(xz) + 1$, entonces

$$l[\gamma(xy)] = e(xz') + e(z'y).$$

Puesto que z' está en la pista $\theta(xy)$, en virtud del teorema 1.8,

$$l[\gamma(xy)] = e(xy),$$

y este camino es una pista: $\theta(xy)$.

Condición necesaria. Supongamos que el arco (z,z') pertenece a la pista $\theta(xy)$. En virtud del teorema de Bratton los segmentos (xz) y (xz') de $\theta(xy)$ son de

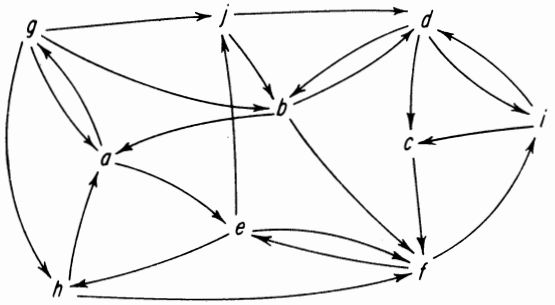


FIGURA 1.21

longitud $e(xz)$ y $e(xz')$; el segmento (xz') está formado por el segmento (xz) y el arco (z,z'); por tanto su longitud es $e(xz') = e(xz) + 1$.

TEOREMA 1.10. *Sea* $\Theta(xy) = (X'; V')$ *un subgrafo parcial de* $G = (X; V)$ *construido del siguiente modo:*

$X' \subset X$ y $V' \subset V$;

$z \in X' \Leftrightarrow e(xz) + e(zy) = e(xy)$;

$(z, z') \in V' \Leftrightarrow z$ y $z' \in X'$ y $e(xz) + 1 = e(xz')$.

Todos los caminos $\gamma(xy)$ *en* $\Theta(xy)$ *son pistas* $\theta(xy)$ *en* G *y todas las pistas* $\theta(xy)$ *de* G *figuran en* $\Theta(xy)$.

Este teorema se sigue directamente de los dos anteriores. Proporciona un algoritmo que permite encontrar las pistas $\theta(xy)$ en un grafo G.

Ejemplo. Considérese el grafo G de la figura 1.21.

Necesitamos construir $\Theta(ac)$. Computamos las desviaciones $e(ax)$ y $e(xc)$ para todo punto x de G, por uno cualquiera de los métodos presentados anteriormente, y encontramos

x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$e(ax)$	0	2	4	3	1	2	1	2	3	2
$e(xc)$	4	2	0	1	3	2	3	3	1	2
$e(ax)+e(xc)$	4	4	4	4	4	4	4	5	4	4

Todos los puntos de G, excepto h, pertenecen a $\Theta(ac)$. Coloquemos estos puntos x de izquierda a derecha según $e(ax)$ y dibujemos los arcos (x,y) existentes en G si y está a la derecha de x. Obtenemos la figura 1.22 que representa $\Theta(ac)$.

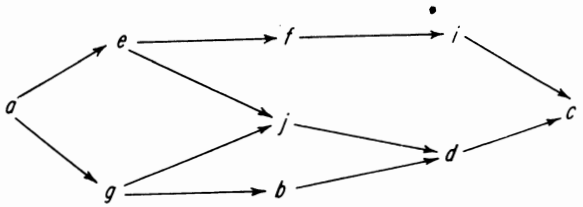


FIGURA 1.22

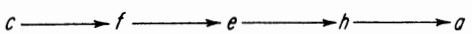


FIGURA 1.23

Conseguimos así cuatro pistas $\theta(ac)$:

$$aefic\,,\ aejdc\,,\ agjdc\,,\ agbdc$$

La figura 1.23 representa $\Theta(ca)$, que no tiene nada en común con $\Theta(ac)$.

Determinación de otros tipos de camino. Varios estudios ofrecen métodos para

encontrar caminos de un tipo dado, cuyo conocimiento puede ser útil: caminos elementales (Ross y Harary, 1952); caminos y circuitos hamiltonianos (Camion, 1960; Flament, 1959; Harary y Ross, 1954); circuitos y caminos de longitud dada (Roy, 1961).

7. Conexidad de un grafo y nociones afines.

7.1. *Introducción.*

La noción de *conexidad* es importante para la aplicación de la teoría de grafos a las ciencias sociales: constituye la versión matemática de uno de los aspectos de la noción psicológica de *cohesividad de grupo;* intuitivamente se refiere a la densidad de relaciones.

Las definiciones que se presentan son resultado de los trabajos de Roy (1961), Harary (1959c) y Luce (1950, 1952b).

7.2. *Tipos de conexidad.*

Sea $G = (X\ ;\ \Gamma)$ un grafo. G es *fuertemente conexo* si para todo par (x, y) de puntos en G existe al menos un camino $\gamma(xy)$ en G. El grafo de la figura 1.24

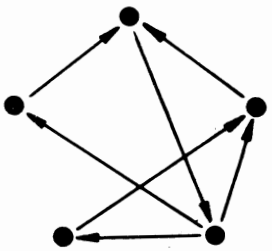


FIGURA 1.24

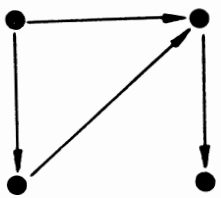


FIGURA 1.25

es fuertemente conexo dado que podemos ir desde cualquier punto a otro cualquiequiera del grafo.

G es *semifuertemente conexo* o *conexo unilateralmente* si para todo par de puntos x, y en G existe un camino $\gamma(xy)$ o un camino $\gamma(yx)$ en G (fig. 1.25).

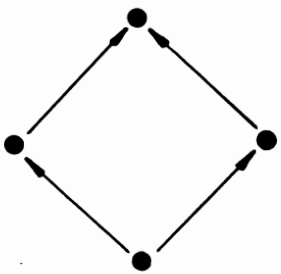


FIGURA 1.26

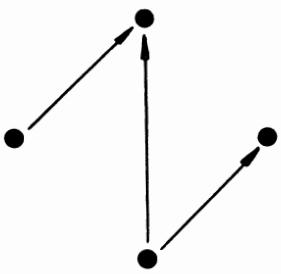


FIGURA 1.27

G es *quasi-fuertemente conexo* si para todo par de puntos x, y en G existe en G un punto z y un punto z' (eventualmente igual a x o y) tal que algunos de los caminos $\gamma(x, z)$, $\gamma(yz)$, $\gamma(z'x)$ y $\gamma(z'y)$ figuran en G (fig. 1.26).

G es *simplemente conexo* o *débilmente conexo* si para todo par (x, y) de G existe una cadena (xy) en G (fig. 1.27).

TEOREMA 1.11. *Todo grafo fuertemente conexo es semifuertemente conexo. Todo grafo semifuertemente conexo es quasi-fuertemente conexo. Todo grafo quasi-fuertemente conexo es débilmente conexo.*

Prueba. La conexidad fuerte implica conexidad semifuerte: su evidencia es inmediata. La conexidad semifuerte implica conexidad quasi-fuerte: si el camino $\gamma(xy)$ existe, basta hacer $x = z'$ y $y = z$. La conexidad quasi-fuerte implica conexidad débil: tomamos, por ejemplo, la cadena (xy), que consiste en los caminos $\gamma(xz)$ y $\gamma(yz)$.

Este teorema establece realmente un orden en los tipos de conexidad. Desde la mayor a la menor tenemos: conexidad fuerte, conexidad semifuerte, conexidad quasi-fuerte y conexidad débil.

Un grafo débilmente conexo es un *grafo conexo.*

Un grafo que no es siquiera débilmente conexo es *inconexo.* Un grafo no conexo es aquél cuyos puntos podemos dividir al menos en dos partes, de forma tal que no existe arco (x, y) con x en una de las partes e y en la otra (fig. 1.28).

Adviértase que un grafo conexo *simétrico* es siempre fuertemente conexo.

Se denomina *máximo componente conexo de un tipo dado* de un grafo G a todo subgrafo de G que

1. es conexo del tipo dado
2. no es un subgrafo de un subgrafo conexo, de G, del tipo dado.

Ejemplo. En el grafo de la figura 1.29, que es sólo débilmente conexo, el subgrafo definido por $\{a, b\}$ es fuertemente conexo pero no constituye un componente máximo fuertemente conexo, dado que el subgrafo definido por $\{a, b, c\}$ es fuertemente conexo. El último subgrafo es un componente máximo fuertemente conexo; pero no es un componente máximo semifuertemente conexo puesto que el subgrafo definido por $\{a, b, c, d\}$ es semifuertemente conexo.

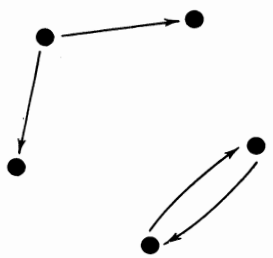


FIGURA 1.28

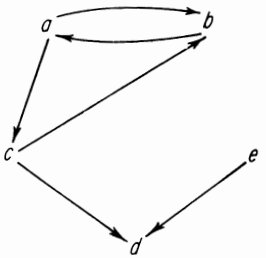


FIGURA 1.29

TEOREMA 1.12. *Las relaciones* R *y* R' *definidas sobre el conjunto* X *de los puntos de un grafo* G, *por*

$(x, y) \in R \Leftrightarrow x$ e y pertenecen al mismo componente máximo fuertemente conexo de G;

$(x, y) \in R' \Leftrightarrow x$ e y pertenecen al mismo componente máximo de G débilmente conexo;

son relaciones de equivalencia.

Prueba. $(x, y) \in R$ significa que hay en G un camino $\gamma(x\ y)$ y un camino $\gamma(y\ x)$.

R es reflexiva: tenemos el camino $\gamma(xx)$, formado por la unión de los terminales de los caminos $\gamma(xy)$ y $\gamma(yx)$.

R es obviamente simétrica.

R es transitiva: $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ implica que los caminos $\gamma(xy)$ y $\gamma(yz)$, que conforman el camino $\gamma(x... y... z...)$, y los caminos $\gamma(zy)$ y $\gamma(yx)$, que configuran el camino $\gamma(z... y... x)$, existen; por tanto, $(x, z) \in R$.

En el caso de R' reemplazamos "camino" por "cadena" en la argumentación.

(Por convención se considera que un grafo constituido por un solo punto es fuertemente conexo).

De aquí que los puntos de un componente máximo fuertemente (o débilmente) conexo constituyen una clase de equivalencia.

Obsérvese que $(x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R'$ (ver teorema 1.11). Por el contrario, generalmente la conversa no es verdadera.

TEOREMA 1.13. *Un grafo* $G = (X; \Gamma)$ *es fuertemente conexo si y sólo si es posible ir desde* a *a cada punto de* X *y desde cada punto de* X *a* a, *siendo* a *un punto cualquiera de* X.

Prueba. Sea a un punto cualquiera de X. Para todo $x \in X$ hay un camino $\gamma(ax)$ y un camino $\gamma(xa)$; por tanto $(a, x) \in R$. Y en consecuencia, X constituye una única clase de equivalencia para R, y G es fuertemente conexo.

Determinación de componentes máximos fuertemente conexos de un grafo por señalización (Algoritmo de Roy, 1961).

1. Elíjase un punto a en el grafo; señálese con los signos (±).
2. Si se señala con (+) un punto x del grafo, señálense con este signo todos los puntos de Γx.
3. Si se señala un punto x con (−), señálense con (−) todos los puntos de $\Gamma^{-1} x$.
4. Cuando ya no podemos señalar más puntos, aquellos que han sido señalados con (±) constituyen un componente máximo fuertemente conexo que incluye a a.
5. Se comienza de nuevo con uno de los puntos que no pertenece a este componente.

Ejemplo. En el grafo de la figura 1.29 se señala con (±) el punto a; después seña-

ñalamos con (+) los puntos b y c, y a continuación, el punto d. Con (−) señalamos el punto b y después c. El componente máximo fuertemente conexo a queda definido por $\{a, b, c\}$ (fig. 1.30). Finalmente encontramos que d y e constituyen, independientemente cada uno, un componente máximo fuertemente conexo.

Observación. El tipo de conexidad de un grafo G determina ciertas propiedades en la matriz de desviación $E(G)$.

Si no hay desviación infinita (∞) en $E(G)$, G es fuertemente conexo.

En caso de que haya desviación infinita en una casilla (xy) de $E(G)$, pero no en la simétrica (yx), entonces G es semifuertemente conexo.

El grafo de la figura 1.31 no es fuertemente conexo, sino semifuertemente conexo. Su matriz de desviación es como sigue:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
a	0	1	1	2	2
b	1	0	1	2	2
c	2	3	0	1	1
d	∞	∞	∞	0	∞
e	1	2	2	1	0

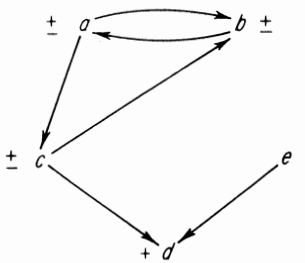


FIGURA 1.30

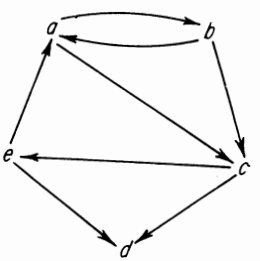


FIGURA 1.31

El subgrafo definido por la eliminación del punto d es, sin embargo, fuertemente conexo, siendo su matriz de desviación:

	a	*b*	*c*	*e*
a	0	1	1	2
b	1	0	1	2
c	2	3	0	1
e	1	2	2	0

7.3. *Grado de conexidad.*

Pueden distinguirse unos grafos de otros dentro de un mismo tipo de conexidad. Por ejemplo, los dos grafos de la figura 1.32 son fuertemente conexos, pero basta suprimir un solo arco en α para cambiar el tipo de conexidad, mientras que en β es necesario suprimir dos.

Luce (1950) llama *grado de conexidad* de un grafo al mínimo número de arcos que deben ser suprimidos para convertirlo en inconexo. Esta definición se originó en el ámbito de estudio de los grafos simétricos, que comprende un solo tipo de conexidad. Desde un punto de vista general podemos considerar el mínimo número de arcos que deben ser suprimidos, para cambiar el tipo original de conexidad de un grafo a un tipo inferior.

De este modo, llamamos *grado de conexidad relativo a un tipo dado de conexidad* al mínimo número de arcos que deben ser suprimidos para cambiar su tipo de conexidad.

Los problemas relativos a los grados de conexidad han sido poco investigados, a excepción del caso de grado relativo a la inconexidad, estudiado por Luce. Más adelante examinaremos algunas nociones afines introducidas por Roy (1961) (ver en el cap. 2, sec. 4.2, las nociones de arcos suprimibles desde el punto de vista de la μ-equivalencia).

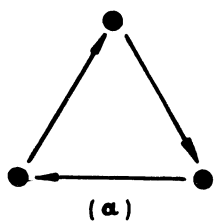


FIGURA 1.32α

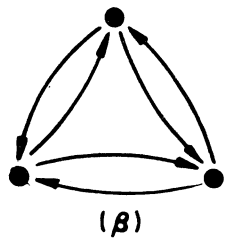


FIGURA 1.32β

7.4. "*Cliques*" (*camarillas*).

Sea $G' = (X' ; V')$ un subgrafo de $G = (X ; V)$; G' es una "clique" si $(x, y) \in V' \Leftrightarrow x$ e $y \in X'$, es decir, si existen en G' todos los arcos posibles. Esto sistematiza una noción corriente en *sociometría:* todos los individuos de una "clique" seleccionan a cada uno de los demás.

Una "clique" máxima es una "clique" que no es un subgrafo de otra "clique".

Un grafo completamente simétrico caracteriza a una única "clique" máxima (ver fig. 1.32β).

Harary y Ross (1957) han expuesto un método matricial para determinar "cliques" máximas en un grafo. En Francia se utiliza un método distinto, basado en en álgebra booleana, que todavía no ha aparecido impreso.

Luce (1950) ha introducido la noción de *"clique" generalizada* o "clique" de orden m:

$G' = (X' ; V')$, subgrafo de $G = (X ; V)$, es una "clique" de orden m si para todo par de puntos (x, y) en X', se da en G que

$$e(xy) \geqq m.$$

Una "clique" de orden $m = 1$ es una "clique" en el sentido exacto del término.

Sea $G^{(m)} = (X; V^{(m)})$ un grafo construido a partir de $G = (X ; V)$, tomando $(x, y) \in V^{(m)}$ si y sólo si $e(xy) \geqq m$. Es evidente que las "cliques" (de orden 1) de $G^{(m)}$ son las "cliques" de orden m de G. Pueden por tanto aplicarse los métodos utilizados para determinar "cliques".

7.5. *Estabilidad y núcleo de un grafo.*

Sea $G = (X ; V) = (X ; \Gamma)$ un grafo. Un conjunto $S \subset X$ es *internamente estable* si x e $y \in S \Rightarrow (x, y) \notin V$; o, si se prefiere, si $\Gamma S \cap S = \phi$.

El conjunto $S\{e, f, g, h\}$, en el grafo de la figura 1.33, es internamente estable; aunque no es el único conjunto internamente estable de este grafo.

Sea $G = (X ; V)$ un grafo; constrúyase un grafo $\overline{G} = (X; \overline{V})$, tomando para cada par, x e $y \in X$, $x \neq y$,

$$(x, y) \in \overline{V} \Leftrightarrow (x, y) \notin V.$$

Queda claro que un conjunto de G, internamente estable, define una "clique" en $\overline{G}$.

Un conjunto $T \subset X$ es externamente estable si para todo $x \in X$, $x \notin T$, se da que

$$(\Gamma x) \cap T \neq \emptyset.$$

El conjunto $\{e, f, g, h\}$, del grafo de la figura 1.33, es externamente estable, dado que desde todo punto externo a este conjunto hay un arco que conduce y termina en un punto de tal conjunto.

En algunos juegos con dos parejas, cada miembro de una de ellas debe vigilar a un miembro de la otra. Si x_1 y x_2 son los miembros de las dos parejas, respectivamente, hagamos $G = (X ; V)$ con $X = X_1 \cup X_2$ y con $(x, y) \in V$ si x es vigilado por y. Necesariamente, entonces, X_1 y X_2 son conjuntos externamente estables.

Un *núcleo* es un conjunto $N \subset X$ que tiene *las dos* propiedades de ser interna y externamente estable. El conjunto $\{e, f, g, h\}$, en el grafo de la figura 1.33, es un núcleo.

Consideremos un torneo consistente en dos encuentros A y B; cada participante en el torneo tiene una cierta seguridad en cada encuentro. Sea X el conjunto de puntos de ejercicios y $G = (X ; V)$, donde $(x, y) \in V$ si y sólo si x es más débil que y en *ambos* encuentros. El torneo será realmente disputado sólo entre los miembros del núcleo de G (figuras 1.34 y 1.35).

Frey (1960) ha mostrado las ventajas de estas nociones para el estudio de las estructuras de poder en los grupos sociales.

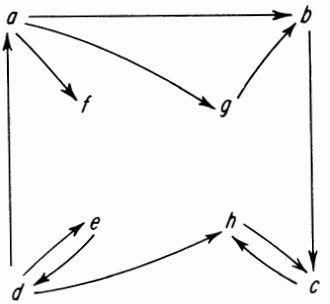


FIGURA 1.33

Berge (1958, capítulos 4 y 5) ha investigado las numerosas propiedades de los conjuntos estables y de los núcleos.

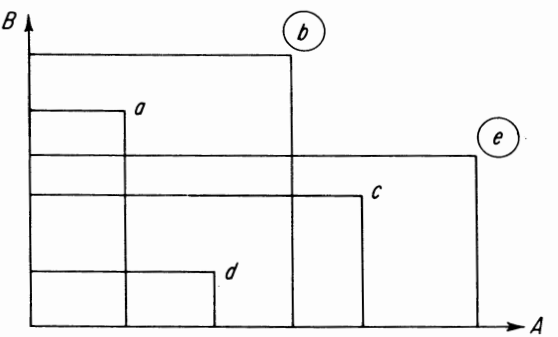


FIGURA 1.34

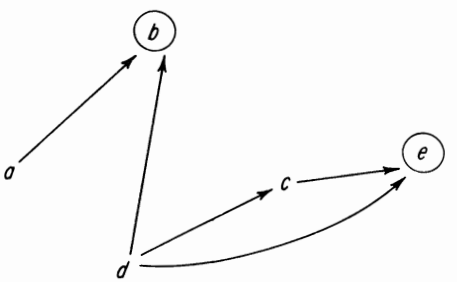


FIGURA 1.35

7.6. *Punto y conjunto de articulación. Potencia de un punto.*

Un punto a de un grafo $G = (X\ ;\ \Gamma)$ es un *punto de articulación de* G, si el subgrafo $G' = (X'\ ;\ \Gamma')$, de G, definido por $X' = X - \{a\}$, es un grafo inconexo. El punto a de la figura 1.36 es un punto de articulación.

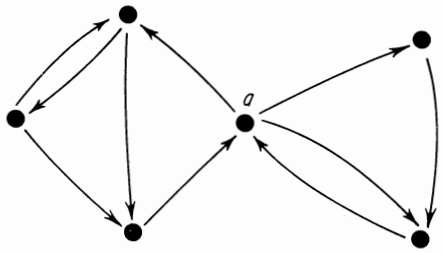


FIGURA 1.36

Generalmente, el individuo que es un punto de articulación en un grafo ocupa una posición privilegiada. Puesto que él asegura la conexión entre distintos subgrupos, las relaciones –buenas o malas - entre ellos dependen de él.

Ross y Harary (1955) han expuesto un método para determinar puntos de articulación en un grafo.

La noción de punto de articulación ha sido generalizada en dos direcciones.

En un grafo $G = (X\ ;\ \Gamma)$, un conjunto $A \subset X$ es un conjunto de articulación de G si el subgrafo $G' = (X'\ ;\ \Gamma')$ de G, definido por $X' = X - A$, es un grafo inconexo. En la figura 1.37, $\{a, b\}$ es un conjunto de articulación. Evidentemente, un punto de articulación es un conjunto de articulación constituido por un único punto.

En un grupo, los puntos de un conjunto de articulación tienen la posición privilegiada de un punto de articulación sólo si constituyen una *coalición.*

Hemos visto que un punto de articulación en un grafo G es un punto cuya eliminación de G convierte a este grafo, si tenía un cierto tipo de conexidad, en un grafo inconexo. Ross y Harary (1959) proponen el examen de cada punto de un grafo para ver qué consecuencia tiene su eliminación en el tipo de conexidad del grafo: la eliminación de algunos puntos puede reducir su conexidad, mientras que la eliminación de otros puede aumentarla. Son puntos debilitantes o reforzantes. De aquí la noción de *potencia de un punto.* Un punto de articulación es evidentemente un punto debilitante. El grafo de la figura 1.38 es fuertemente conexo, pero la eliminación de un punto cualquiera en este grafo produce un grafo que no es fuertemente conexo. Por consiguiente todos sus puntos son debilitantes, aunque no son puntos de articulación. El grafo de la figura 1.39 no es fuertemente conexo, pero

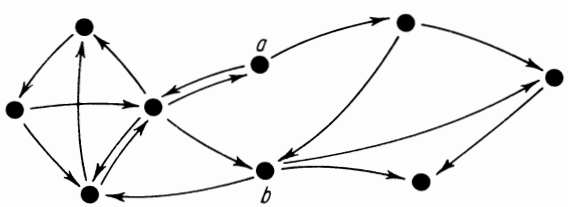


FIGURA 1.37

la eliminación del punto a da lugar a un grafo fuertemente conexo; por tanto este punto es reforzante.

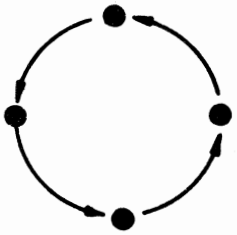


FIGURA 1.38

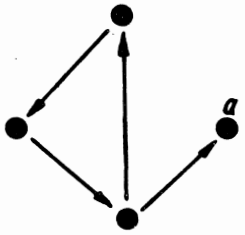


FIGURA 1.39

8. EL CONJUNTO DE GRAFOS DE n PUNTOS.

8.1. *Introducción.*

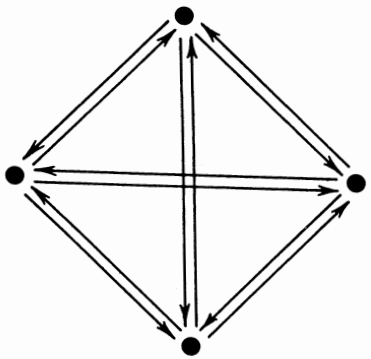


FIGURA 1.40

Sea $G^{(n)} = (X\,;\, V^{(n)})$ el grafo completamente simétrico sin "loop" construido sobre $|X| = n$ puntos. Este grafo es único. Tenemos: $|V^{(n)}| = n\,(n\text{-}1)$ arcos (puesto que aquí nos limitamos a grafos sin "loop"). La figura 1.40 representa $G^{(4)}$.

Todos los grafos de n puntos construidos sobre el conjunto X son grafos parciales de $G^{(n)}$. Sea $\mathscr{G}_n$ el conjunto de estos grafos. Existen en este conjunto de grafos ciertas relaciones de interés; consideraremos ahora algunas de ellas (otras serán examinadas más tarde, como la relación de μ-equivalencia de Roy; Cap. 2, Sec. 4.2).

8.2. *Isomorfismo.*

Sean $G_1 = (X\,;\, V_1)$ y $G_2 = (X\,;\, V_2)$ dos grafos. Dado que ambos están construidos sobre el mismo conjunto X, pertenecen al mismo conjunto $\mathscr{G}_n$ (con $n = |X|$.

G_1 y G_2 son isomorfos si puede establecerse una función biunívoca f entre los puntos de $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,

$$f(x_i) = x_j$$

función tal que para cualquier par de puntos en X se da

$$(x_i, x_j) \in V_1 \Leftrightarrow (f(x_i), f(x_j)) \in V_2.$$

Dicho de otra forma, basta reemplazar cada punto $x_i \in X$ por el punto $f(x_i)$ para pasar de G_1 a G_2 sin afectar los arcos del grafo.

Los dos grafos de las figuras 1.41 y 1.42 son diferentes, aunque isomorfos, siendo la función que establece la correspondencia entre sus puntos:

$$f(a) = b\,, \qquad f(c) = a\,,$$
$$f(b) = d\,, \qquad f(d) = c\,.$$

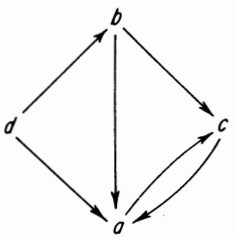


FIGURA 1.41

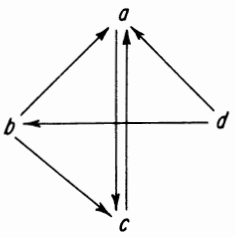


FIGURA 1.42

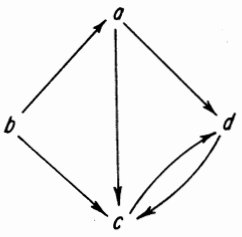


FIGURA 1.43

Se observa más fácilmente el isomorfismo si se compara el grafo de la figura 1.41 con el de la figura 1.43, el cual es idéntico al de la figura 1.42, cuya disposición nos permite visualizar la función $f(f(x)$ tiene la misma disposición geométrica que $x)$.

La relación de isomorfismo, $(G_i, G_j) \in I$ si y sólo si G_i y G_j son isomorfos, es una relación de equivalencia en $\mathscr{G}_n$. En efecto, $(G_i, G_j) \in I$ *(reflexividad)*, siendo f la función de identidad: $f(x) = x$ para todo $x \in X$;

$$(G_i, G_j) \in I \Leftrightarrow (G_j, G_i) \in I \quad \textit{(simetría)}$$

siendo entonces f^{-1} la función. Puesto que f es biunívoca, $f^{-1} f(x) = x$; finalmente,

$$(G_i, G_j) \in I \text{ y } (G_j, G_k) \in I \Rightarrow (G_i, G_k) \in I \quad \textit{(transitividad)}.$$

Si f_1 es la función que aplica G_i en G_j, y f_2 es la función que aplica G_j en G_k, la función $f = f_2 f_1$ aplica G_i en G_k y entonces

$$(x_h, x_e) \in V_i \Rightarrow [f(x_h), f_1(x_e)] \in V_j$$
$$\Rightarrow [f_2(f_1(x_h)), f_2(f_1(x_e))] \in V_k;$$

de aquí que $(x_h, x_e) \in V_i \Rightarrow [f(x_h), f(x_e)] \in V_k$.

8.3. *Laticias de grafos de n puntos.*

Consideremos el conjunto $V^{(n)}$ de los arcos del grafo completamente simétrico de n puntos $G^{(n)}$. Sabemos cómo se construye el conjunto $\mathfrak{P}(V^{(n)})$ de las partes de $V^{(n)}$ (Sec. 1.7) y la laticia de $\mathfrak{P}(V^{(n)})$ (Sec. 3.3). Por ejemplo, si $n = 3$ y $X = \{a, b, c\}$, se tiene

$$V^{(3)} = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\};$$

$V^{(3)}$ tiene seis elementos y $\mathfrak{p}(V^{(3)})$ tiene $2^6 = 64$ elementos; la laticia de $\mathfrak{p}(V^{(3)})$ es difícil de representar.

Hagamos corresponder el grafo $G_i = (X\,;\,V_i)$ a cada parte V_i de $V^{(n)}$; construimos entonces todos los grafos de n puntos. El conjunto G_n corresponde por tanto a $\mathfrak{p}(V^{(n)})$.

Puesto que $\mathfrak{p}(V^{(n)}$ está ordenado por inclusión, podemos definir una relación de orden sobre $\mathscr{G}_n$ que será llamada también inclusión:

$$V_i \subset V_j \Rightarrow G_i = (X\,;\,V_i) \subset G_j = (X\,;\,V_j).$$

Si $G_i \subset G_j$, diremos que G_i está incluido en G_j, también que G_i es un grafo parcial de G_j (Sec. 5.4).

El conjunto $\mathscr{G}_n$, ordenado por inclusión, constituye una laticia $\mathfrak{L}_n$, del mismo modo que $\mathfrak{p}(V^{(n)})$.

8.4. *σ-Equivalencia – Laticias de grafos simétricos de n puntos.*

Sea $G_i = (X\,;\,V_i)$ un grafo. Se construye un grafo $G_i^\sigma = (X\,;\,V_i^\sigma)$, en el que V_i^σ está definido por $(x, y) \in V_i^\sigma$ si $(x, y) \in V_i$ o $(y, x) \in V_i$, o ambas cosas a la vez. Pasamos de G_i a G_i^σ por simetrización de G_i.

Diremos que dos grafos G_i y G_j son σ-equivalentes si y sólo si $G_i^\sigma = G_j^\sigma$. Los grafos de las figuras 1.44 y 1.45 son σ-equivalentes, puesto que su simetrización es la misma, como queda reflejado en la figura 1.46. La relación σ es efectivamente una relación de equivalencia dado que está definida por relación a la igualdad de las simetrizaciones: $G_i^\sigma = G_j^\sigma$.

Esta relación está definida sobre cada conjunto $\mathscr{G}_n$, puesto que si $G_i \in \mathscr{G}_n$ y $G_i \in \mathscr{G}_m$, donde $n \neq m$, es imposible tener $G_i^\sigma = G_j^\sigma$.

Cada clase de *σ-equivalencia* es una parte de la laticia $\mathfrak{L}_n$; en cada clase todo subconjunto posee un límite superior, el cual es la unión de los grafos del subconjunto. Pero la intersección de los grafos del subconjunto no está necesariamente en la clase: no hay límite inferior (se dice que cada clase es una *semi-laticia superior*). La figura 1.47 representa una clase tal de σ-equivalencia.

Representaremos por $\mathscr{G}_n^\sigma$ el conjunto de las clases de σ-equivalencia de $\mathscr{G}_n$. Cada clase de σ-equivalencia puede ser representada por el grafo simétrico que es su máximo. Por consiguiente $\mathscr{G}_n^\sigma$ puede ser considerado como el conjunto de grafos simétricos de n puntos.

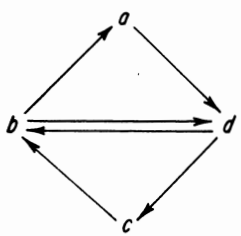


FIGURA 1.44

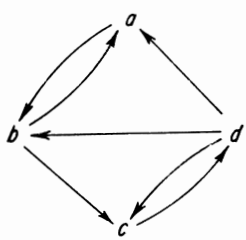


FIGURA 1.45

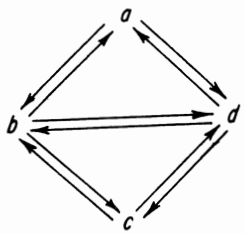


FIGURA 1.46

Al igual que $\mathscr{G}_n$, este conjunto $\mathscr{G}_n^{\sigma}$ está ordenado por inclusión y tiene la estructura laticial, que será designada por $\mathscr{L}_n^{\sigma}$; dos grafos son efectivamente σ-equivalentes si tienen el mismo conjunto de *aristas* (diferentes por sus arcos). Podemos por tanto estudiar el conjunto de las $n(n-1)/2$ aristas que pueden existir en un grafo de n puntos.

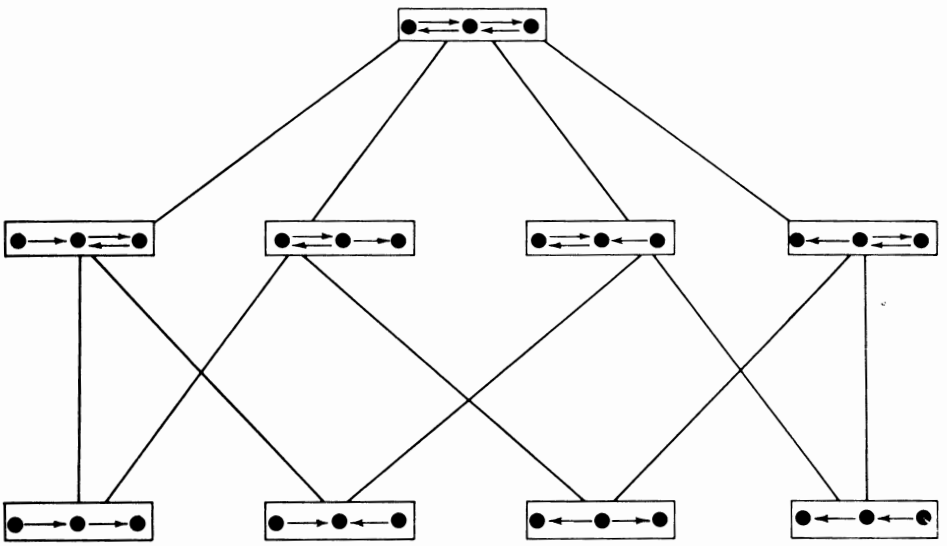


FIGURA 1.47

Si $n=3$ y $X = \{ a, b, c \}$, este conjunto de aristas es

$$\{ (a, b), (a, c), (b, c) \} .$$

La figura 1.48 muestra la laticia de las partes de este conjunto y, a su vez, la laticia $\mathscr{L}_n^{\sigma}$.

8.5. *Distancias entre grafos.*

Hemos definido la distancia entre dos partes de un conjunto como la potencia de la diferencia simétrica de estas partes (Sec. 4). Pero hemos visto que el conjunto de los grafos de n puntos era isomorfo al conjunto de las partes del conjunto de arcos del grafo completamente simétrico de n puntos. Esta distancia entre dos grafos $G_i = (X; V_i)$ y $G_j = (X; V_j)$ puede ser definida como sigue:

$$d(G_i, G_j) = |V_i \oplus V_j| .$$

Los teoremas 1.4 y 1.5 son pues válidos para $\mathscr{L}_n$, definiendo, por supuesto, la unión y la intersección de los dos grafos de $\mathscr{L}_n$ por la unión y la intersección de sus conjuntos de arcos:

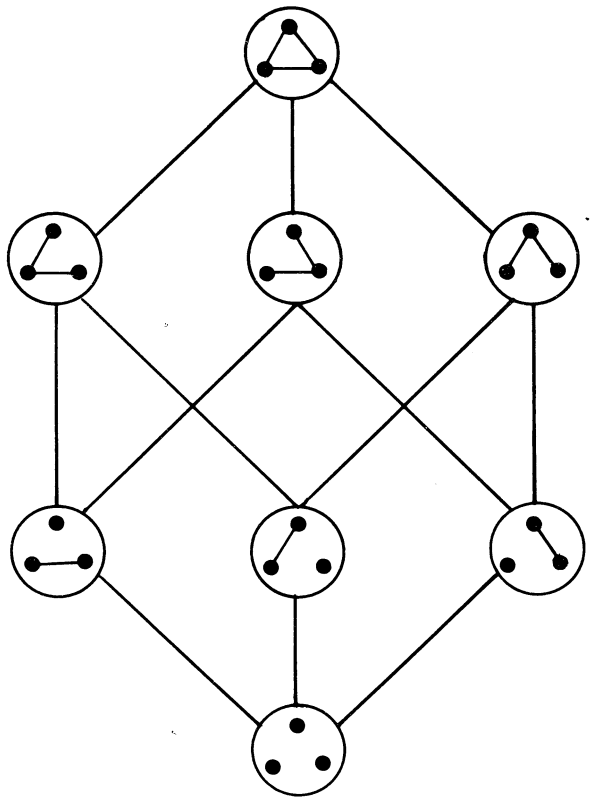


FIGURA 1.48

$$G_i \cup G_j = (X\,;\, V_i \cup V_j);$$
$$G_i \cap G_j = (X\,;\, V_i \cap V_j).$$

Las mismas nociones pueden ser aplicadas a $\mathcal{L}_n^\sigma$ si el término "arco" es reemplazado por "arista" en el análisis anterior. Obsérvese que la distancia $d\,(G_i^\sigma, G_j^\sigma)$ en $\mathcal{L}_n^\sigma$ *no es* igual a la distancia $d\,(G_i, G_j)$ en $\mathcal{L}_n$.

9. DIVERSOS TIPOS DE GRAFOS.

Hemos considerado hasta ahora grafos que representan una correspondencia Γ dentro de un conjunto X; esto sólo nos permite representar una relación al modo de "todo o nada" entre los miembros de un grupo. En psicología social generalmente se trata con fenómenos más complejos, lo cual ha sido posible por la teoría de grafos. Los diversos tipos de grafos que consideraremos ahora han sido matemáticamente menos estudiados que los grafos $(X\,;\,\Gamma)$. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el estudio de grafos más complejos puede ser reducido en gran medida al estudio de grafos del tipo $(X\,;\,\Gamma)$.

Grafo simple. Un grafo simple es un grafo $(X_0 ; \Gamma) = (X_0 ; V)$ tal que existe una bipartición X, Y de X_0: $X \cup Y = X_0$, $X \cap Y = \emptyset$ y que todo arco de V tiene su origen en X y su punto terminal en Y:

$$(x, y) \in V \Rightarrow x \in X \text{ y } y \in Y$$

o

$$\Gamma X \subset Y \text{ y } \Gamma Y = \emptyset.$$

Obsérvese que $X \cap Y = \emptyset$ y que $\Gamma X \subset Y$ implica $(\Gamma X) \cap X = \emptyset$.

Un grafo simple se utiliza para representar una aplicación de un conjunto X en un conjunto Y que es diferente de X. Un grafo simple es denotado por $(X, Y; \Gamma)$. La figura 1.49 representa el grafo de la correspondencia cuya tabla fue presentada en la sección 2.5.

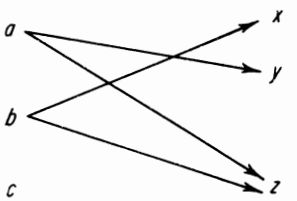


FIGURA 1.49

Grafo valorado. Un grafo valorado es un grafo $(X ; V)$ al que se añade una aplicación v del conjunto V de los arcos, en el conjunto de los números reales. El *número* asociado al arco (x, y) es $v(x, y)$ y se llama *valor* del arco; la función v es la *valoración* del grafo (fig. 1.50).

Un grafo valorado permite representar la intensidad de las relaciones dentro de un grupo. Los grafos valorados serán ampliamente tratados en el capítulo 2, para tomar en consideración el costo (psicológico o financiero) de las comunicaciones en un grupo.

Si para cualquier $(x, y) \in V$, $v(x, y)$ es igual a una constante, el grafo tiene valoración constante y puede ser tomado como un grafo no valorado.

En un grafo valorado un camino se define como en el no valorado, pero la *longitud* del camino es la suma de los valores de los arcos de que consiste. Si se considera un grafo no valorado como grafo con valoración constante igual a uno, las longitudes valoradas y no valoradas de un camino son idénticas. Puede ser más útil, sin embargo, por razón de generalidad, considerar solamente grafos valorados.

Las nociones de desviación y pista se definen como en el grafo no valorado, a partir de la longitud, aunque esta longitud está valorada. Así, en el grafo valorado de la figura 1.50, la desviación $e(cb)$ es 2.5, que es la longitud del camino (cab), aun cuando el arco (c, b) existe, con un valor $v(c,b) = 4$.

El cálculo de desviaciones y el método utilizado para hallar las pistas en un grafo valorado será tratado en el capítulo 2.

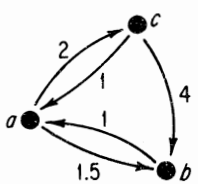


FIGURA 1.50

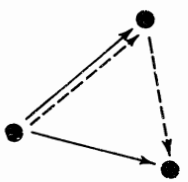


FIGURA 1.51

Multi-grafo. Un multi-grafo representa en un conjunto X varios tipos de relaciones: Γ, Δ, ..., se denota por $(X; \Gamma, \Delta)$. Un multi-grafo permite tomar en consideración las diversas clases psicológicas de relaciones en un grupo; un sociograma basado sobre varios criterios de elección es un multi-grafo. Representamos un multi-grafo utilizando diferentes colores o métodos, correspondientes a las diversas relaciones $\Gamma, \Delta \ldots$ (Figura 1.51).

Grafo algebraico. Un grafo algebraico es un bi-grafo (multi-grafo con dos relaciones), con una relación, P, considerada como positiva y una relación, N, negativa y tal que un par no puede pertenecer a P y a N al mismo tiempo (aunque puede no pertenecer ni a P ni a N):

$$(x, y) \in P \Rightarrow (x, y) \notin N$$

y

$$(x, y) \in N \Rightarrow (x, y) \notin P.$$

Un grafo algebraico es un caso muy particular de multigrafo, o bien de grafo valorado, con el conjunto de valores reducido a $+1$ y -1.

En el capítulo 3 utilizaremos grafos algebraicos completamente simétricos, tales como el de la figura 1.52, en el que los arcos representados por trazos completos pertenecen a P y aquéllos que están representados por trazos discontinuos pertenecen a N.

Grafo marcado. Un grafo marcado es un grafo del tipo $(X; \Gamma)$, pero en el que las particiones de X generalmente son independientes de la función Γ. Un signo gráfico diferencia los puntos de las diversas partes (Figura 1.53) en el sociograma de un grupo mixto. A menudo se representan las chicas por un círculo y los chicos por un triángulo: éste es un grafo marcado. Los métodos de señalización (numéricos o por $\pm$) que fueron usados anteriormente (Secs. 6.3 y 7.4) producen grafos marcados, pero en esta ocasión se tienen en cuenta ciertas propiedades de la función.

Los distintos tipos de grafos que han sido ya definidos brevemente pueden ser combinados en el mismo grafo: por ejemplo, un sociograma con elección y exclusión, orden de preferencia y otros criterios en un grupo mixto será representado por un multigrafo algebraico, marcado y valorado.

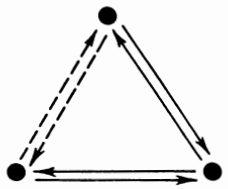


FIGURA 1.52

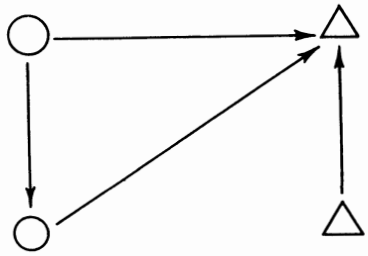


FIGURA 1.53

II. REDES DE COMUNICACION

1. EL PROBLEMA

Un grupo social puede existir como tal grupo, sólo si sus miembros se comunican entre sí por medio de la expresión oral, escrita, mímica o de cualquier otro tipo.

Esta proposición es fácilmente admitida, pero el hecho de que toda comunicación, cualquiera que sea su naturaleza, requiere un soporte físico, como ondas sonoras o visuales, documentos escritos, etc., es pasado por alto con frecuencia. La comunicación, por tanto, implica procesos físicos más o menos complejos y, en muchos casos, el medio físico estorbará y hasta impedirá la comunicación entre ciertos miembros del grupo.

Este aspecto físico del proceso de comunicación se da en todos los grupos, pero es quizás en los grupos grandes e institucionalizados donde se muestra más claramente. En un gran servicio administrativo, las oficinas están situadas de forma que faciliten los intercambios verbales directos, hay personal asignado para llevar documentos de una a otra y se instalan sistemas de intercomunicación, etc.

A nivel nacional e internacional no es necesario mencionar la importancia de los sistemas de telecomunicación.

El conjunto de condiciones físicas que posibilitan la comunicación en un grupo será denominado red de comunicación. Lo cual no es otra cosa que una generalización de la expresión usual: red telefónica, red postal, red viaria, etc.

La creación de una red de comunicación en un grupo no suele basarse en criterios científicos válidos. Y sin embargo la elección de cuál deba ser la red establecida concierne al grupo, cuya vida puede resultar afectada en gran medida por ella. El problema psico-sociológico que se plantea es el siguiente: *en qué medida depende la vida del grupo de la red de comunicación disponible.*

Se debe a Bavelas (1948 y 1950) y a su escuela de investigación (especialmente Leavitt, 1951) el haber comenzado a tratar este problema de un modo científico, matemático y experimental. Muchos trabajos matemáticos* o experimentales+ han contribuido a nuestro conocimiento, pero sin llegar a una completa solución.

Mostraremos que una red puede ser representada por un grafo, valorado o no (Sec. 2). La idea de Bavelas fue buscar ciertas características matemáticas del grafo

---

* Especialmente Chandessais (1957); Flament (1959); Harary y Ross (1954, 1957); Luce (1950, 1951, 1952b, 1953); Luce y Perry (1949); Mason (1953, 1956); Ross y Harary (1952, 1955); Shaw (1954a).

\+ Especialmente Christie, Luce y Macy (1952); Flament (1956, 1958a, 1961); Gilchrist, Shaw y Walker (1954); Heise y Miller (1951); Hirota (1953); Luce, Macy, Christie y Hay (1953); Macy, Christie y Luce (1953); Mulder (1959a, 1959b, 1960a, 1960b); Shaw (1954b, 1954c, 1955, 1956); Shaw y Gilchrist (1956); Shaw, Rothschild y Strickland (1957); Shelly y Gilchrist (1958).

que representa una red y examinar experimentalmente su influjo en la vida del grupo. Sin embargo, el análisis de diferentes trabajos y nuevos experimentos (Flament, 1956 y 1958a) ha mostrado que estas características de la red son insuficientes para explicar los fenómenos; la tarea asignada a un grupo‡ y especialmente las relaciones entre la red y la tarea, también deben ser tenidas en cuenta (Flament, 1958c).

Mostraremos también que al menos ciertos aspectos de una tarea pueden representarse por grafos simples y múltiples (Sec. 3).

Esto nos conducirá al estudio (Sec. 4) de las complejas relaciones entre grafos, problema para el que no hay equivalente conocido en la teoría de grafos. Aun cuando muchos problemas permanecen sin resolver y quizás también sin identificar, no obstante sería posible describir matemáticamente cualquier actividad de grupo siempre que añadiéramos ciertas nociones a la teoría de grafos, nociones cuya exacta naturaleza de momento sólo puede ser sospechada. El desarrollo de la investigación en este sentido sería fructífero, tanto para las matemáticas como para el conocimiento de la sociedad.

El análisis matemático así como los datos experimentales serán presentados conjuntamente en la última sección de este capítulo (Sec. 5). La complejidad matemática podrá parecer desproporcionada en comparación con la simplicidad de los estudios de laboratorio. Sin embargo el análisis matemático no pretende explicar los resultados experimentales, de la misma forma que el estudio de laboratorio no constituye un fin en sí mismo; ambos, de modo diferente y complementario, proporcionan parte del conocimiento necesario para el estudio de grupos naturales, grandes y complejos.

2. DESCRIPCION DE UNA RED DE COMUNICACION.

2.1. *Introducción.*

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ el conjunto de n miembros de un grupo. Definimos sobre X^2 una aplicación Γ que expresa las posibilidades de comunicación en el grupo:

$(x_i,x_j) \in \Gamma$ si y sólo si x_i puede dirigir una comunicación a x_j.

Por consiguiente una red de comunicación puede ser representada por un grafo, el cual será designado por N:

$$N=(X;\Gamma).$$

Si N es una red de comunicación, un arco $(x_i,x_j) \in N$ es denominado *canal de comunicación.*

En muchos casos N es un grafo simétrico:

$$(x_i,x_j) \in \Gamma \Leftrightarrow (x_j,x_i) \in \Gamma,$$

pero existen grupos en los que algunas posibilidades de comunicación son unidireccionales (¡ este caso se da con frecuencia en redes de tráfico!).

---

‡ Leavitt (1951) parece que vislumbró este aspecto del problema, pero a causa del insuficiente análisis matemático, no se reveló su importancia. La idea fue posteriormente olvidada.

Podemos también establecer $(x_i,x_j) \in \Gamma$, si consideramos la noción de comunicación consigo mismo, o $(x_i,x_i) \in \Gamma$, si se considera Γ referida solamente a los intercambios materiales de comunicación que tienen una extensión física o temporal. En cualquier caso, la convención adoptada carece de importancia.

2.2. *Red valorada.*

En numerosos problemas no basta considerar sólo la alternativa de que x_i puede o no puede comunicar con x_j. Resulta necesario tomar en consideración la capacidad de cada canal, la accesibilidad para su utilización, el tiempo que se necesita y el coste de la transmisión de un mensaje en este canal, etc. Las correspondientes indicaciones numéricas constituyen *valoraciones* de N.

En lugar de asignar varios sistemas de valoración a N, es conveniente, siempre que sea posible, integrarlos en un sistema único. En general, siempre que se utiliza una valoración única, ésta representa el *coste total* del uso de cada canal.

La valoración de un canal puede consistir en una constante firmemente determinada, o simplemente un valor medio que varía más o menos al azar (en relación con el proceso de comunicación estudiado). Pero *si el coste de utilización de un canal varía con su uso,* no es entonces legítima la representación de la red por un grafo valorado.

Cuando todos los canales están igualmente valorados, puede establecerse una valoración común igual a uno, pudiendo, en efecto, considerar la red sólo en su forma no valorada.

2.3. *Red conexa.*

Supongamos que x_i quiere enviar a x_j un mensaje a; si $(x_i,x_j) \in \Gamma$, no hay problema y se dice que la comunicación a de x_i a x_j es *directa*; si $(x_i,x_j) \notin \Gamma$ y existe en N un camino

$$\gamma(x_i\, x_j) = (x_i\, x_{i+1}\, x_{i+2} \ldots x_j),$$

los puntos $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots$, pueden *retransmitir* el mensaje a de x_i a x_j, diciéndose que la comunicación a de x_i a x_j es *indirecta;* por ultimo, si no existe ningún camino $\gamma(x_i\, x_j)$ en N, decimos que la comunicación a de x_i a x_j es *imposible.*

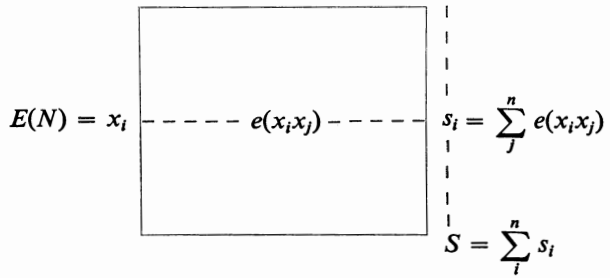
Estos enunciados revelan la importancia de las nociones de conexidad en el estudio de las redes de comunicación. En especial, *todas las comunicaciones imaginables serán posibles, directa o indirectamente, si y sólo si N es fuertemente conexo.* Los trabajos de Luce sobre conexidad de grafos (1950, 1951, 1952b, 1953) fueron realizados para el análisis de redes de comunicación.

2.4. *El índice de centralidad de Bavelas.*

Examinando las redes de la figura 2.1, Bavelas (1950) observa que intuitivamente

se puede decir que N_1 está más *centralizado* que N_2, N_2 más que N_3, etc. Define entonces un índice de centralidad con el cual pueden ser clasificadas las cuatro redes de la figura 2.1, en una dirección paralela a su orden de centralización.

El índice de centralidad de Bavelas puede ser definido a partir de la matriz de desviaciones asociada a N: $E(N)$.



Para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula $s_i = \sum_j^n e(x_i\, x_j)$; después se suma:

$$S = \sum_i^n s_i \ .$$

El índice de centralidad de punto se define como $c_i = S/s_i$; el *índice* (global) *de centralidad* es la suma de las centralidades de punto:

$$C = \sum_i^n c_i$$

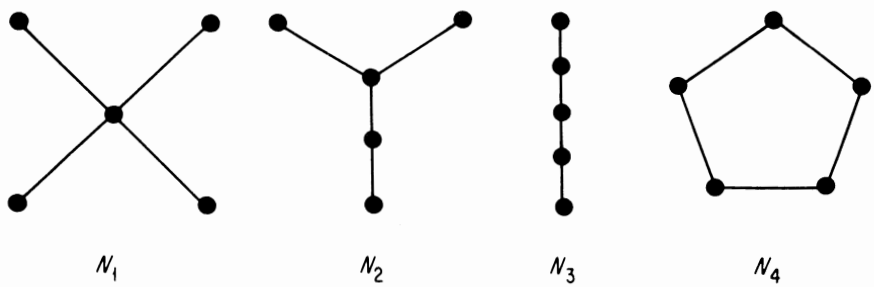


FIGURA 2.1

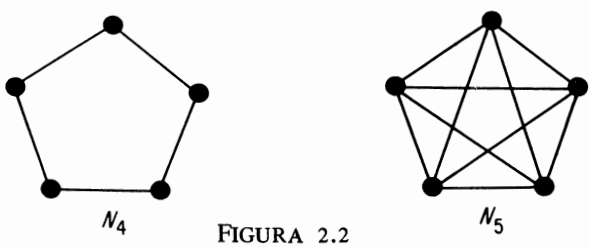


FIGURA 2.2

(Obsérvese que si N no es fuertemente conexo, es decir, si ninguna de las desviaciones es igual a ∞, estas operaciones son un tanto sin sentido).

TABLA 2.1. CENTRALIDAD DE REDES. (FIGS. 2.1,2.2)

Red	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
Centralidad	26.4	26.2	26.1	25	25

Las redes N_1 a N_4 están clasificadas por el índice como se esperaba; pero N_4 y N_5 tienen el mismo índice de centralidad, aun cuando no es posible admitir que estén igualmente centralizadas (ver figura 2.2).

Debe por tanto examinarse la verdadera significación de este índice*. A partir de las definiciones obtenemos

$$C = \sum_i^n c_i = \sum_i^n \frac{S}{s_i} = \sum_i^n \frac{\sum_j^n s_j}{s_i} = \sum_{i,j}^{n^2} \frac{s_j}{s_i} = \sum_i^n \frac{s_i}{s_i} + \sum_{i \neq j}^{n(n-1)/2} \frac{s_i}{s_j} + \frac{s_j}{s_i}$$

$$= n + \sum_{i \neq j}^{n(n-1)/2} q_{ij} ,$$

donde $q_{ij} = \frac{s_i}{s_j} + \frac{s_j}{s_i}$

Puede mostrarse fácilmente que q_{ij} es mínimo si y sólo si $s_i = s_j$; si esto es así para todos los pares (ij), se obtiene el índice de centralidad mínimo:

$$c_{\min} = n^2 ;$$

esto es lo que se observa en N_4 y N_5 (Tabla 2.1)

Esto nos lleva a pensar que el índice de Bavelas mide específicamente el *grado de disparidad entre los puntos de un grafo.*

Seamos más precisos con respecto a esta noción. Sabemos (Capítulo 1, Sec. 8.2) que dos grafos $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ y $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ son isomorfos si existe una función biunívoca f entre $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, \ldots\}$ y $X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \ldots\}$: $x_{2i} = f(x_{ij})$ tal que

$$(x_{1i}, x_{1j}) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow (f(x_{1i}), f(x_{1j})) \in \Gamma_2 .$$

Se dice que un grafo N es *automorfo* siempre que es isomorfo consigo mismo, es decir, si hay una función biunívoca f de X consigo mismo, tal que

$$(x_i, x_j) \in \Gamma \Leftrightarrow (f(x_i), f(x_j)) \in \Gamma .$$

En caso de automorfismo podemos tener $f(x_i) = x_i$, aunque no para todo i, porque entonces f sería una función de identidad, en cuyo caso sería preferible no referirse a automorfismo. Se podría definir por consiguiente un grado de automorfismo tomando en consideración, para cada punto x_i, el número de diferentes

* Hemos estudiado en otro lugar los principios que fundamentan la construcción y validación de un índice de estructura de grupo (Flament, 1962a).

puntos x_j para los cuales existe un automorfismo f, tal que $f(x_i)=x_j$. Hasta cierto punto esto es lo que mide el índice de Bavelas.

En efecto, si $x_j=f(x_i)$, tenemos para todo k:

$$\Gamma^k x_i = \{x_h, x_l, \ldots\},$$

y

$$\Gamma^k x_j=\Gamma^k f(x_i)= \{f(x_h), f(x_l), \ldots\};$$

es decir,

$$|\Gamma^k x_i| = |\Gamma^k f(x_i)|;$$

pero es evidente que

$$s_i = \sum_j^n e(x_i x_j) = \sum_k k\,|\Gamma^k x_i - \bigcup_{h=1}^{h=k-1} \Gamma^h x_i|;$$

por consiguiente, si $x_j=f(x_i)$, tenemos

$$s_i=s_j \text{ y } q_{ij}=\frac{s_i}{s_j}+\frac{s_j}{s_i} = \text{mínimo.}$$

Pensamos que, a través de este análisis, hemos puesto de manifiesto una significación desconocida del índice de Bavelas, sin pretender haber agotado el contenido de este índice verdaderamente complejo. Indudablemente cabe plantear si es demasiado complejo para su eficaz utilización en la descripción de una red.

3. DESCRIPCION DE UNA TAREA EN TERMINOS DE COMUNICACION.

3.1. *Introducción.*

Se pueden distinguir dos aspectos en la actividad de un grupo:

1. aspecto *interindividual:* comunicación de información (se toma este término en su sentido general);
2. aspecto *individual:* elaboración, a partir de informaciones poseídas o recibidas, de nuevas informaciones para su transmisión.

Sólo nos interesa aquí el primer aspecto.

En general no es posible determinar *a priori* en un grupo de discusión todas las informaciones utilizadas, o los intercambios que tendrán lugar en el grupo. La descripción matemática de la actividad de un grupo se torna entonces considerablemente más dificultosa. Este problema será estudiado más adelante. (Sec. 5).

Por otra parte, en un grupo de trabajo generalmente es posible determinar *a priori* las informaciones e intercambios, es decir, es posible describir la tarea en términos de comunicación.

3.2. *Informaciones primarias y secundarias.*

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de α informaciones utilizadas en la realización de la tarea.

El conjunto de informaciones *primarias* consiste en una parte de A, es decir, en

las informaciones poseídas por el grupo al comienzo de la actividad. Las demás informaciones son *secundarias,* o lo que es lo mismo, se obtienen mientras se desarrolla la actividad, a partir del reagrupamiento de diversas informaciones (primarias o secundarias). Por ejemplo, la solución de un problema de aritmética es una información secundaria, obtenida por el reagrupamiento de los elementos del problema, que generalmente son informaciones primarias. En una empresa la cifra de ventas es una información secundaria, obtenida a partir de un conjunto de informaciones primarias (ventas) o secundarias (cifras parciales de venta). La peculiaridad de la tarea determina el modo en que se obtiene la información secundaria a partir de las informaciones relevantes.

Consideremos el conjunto de partes de A ;

$$\mathfrak{p}(A) = \{A_1, A_2, \ldots\},$$

donde

$$A_i \in \mathfrak{p}(A) \Leftrightarrow A_i \subset A ,$$

y el grafo simple $P=(A, \mathfrak{p}(A);\Pi)$, definido por $(a_i, A_j) \in \Pi$ si y sólo si

1. $a_i \in A_j$ y A_j es un reagrupamiento necesario y suficiente para la elaboración de una información secundaria, o
2. $\{ a_i \}=A_j$.

(En el segundo caso, cualquier información derivada de sí misma se considera convencionalmente como secundaria; en breve volveremos sobre este punto).

En general el grado de recepción de un gran número de puntos $\mathfrak{p}(A)$ será nulo; en la práctica, no serán tenidos en cuenta.

3.3. *Localización.*

Sea $L_e=(X, A; \Lambda_e)$ el grafo que representa la *localización de posibles emisiones.*

Al comienzo de una actividad cada información primaria es trasladada a uno o más miembros del grupo; si x_i posee a_j, puede emitir esta información.

De modo similar, si x_i procede a un reagrupamiento A_h, produciendo una información secundaria a_j, podrá emitir a_j.

En consecuencia, definimos $L_e=(X, A; \Lambda_e)$ por

$$(x_i, a_j) \in \Lambda_e$$

si y sólo si

1. x_i posee a_j al principio de la tarea, *o bien*
2. x_i obtiene a_j de una parte de A.

El primer caso corresponde a la localización inicial de las informaciones primarias; el segundo, a la localización del reagrupamiento que produce informaciones secundarias.

Sea $L_r=(\mathfrak{p}(A), X; \Lambda_r)$ el grafo que representa la *localización de las recepciones necesarias.*

Si x_i debe llevar a cabo un reagrupamiento A_h para obtener una información secundaria, debe recibir el grupo de informaciones A_h .

En general, se considera completa una tarea si determinados miembros del grupo

han obtenido finalmente ciertas informaciones; si x_i debe finalmente obtener a_j, es necesario que le llegue esta información.

Por consiguiente definimos $L_r = (\mathfrak{p}(A), X; \Lambda_r)$ por

$$(A_k, x_i) \in \Lambda_r$$

si y sólo si

1. x_i debe finalmente obtener la información a_j, tal que $\{a_j\} = A_h$ *o bien*
2. x_i debe realizar el reagrupamiento A_h.

El primer caso corresponde a la localización final de informaciones; el segundo, a la localización del reagrupamiento.

Obsérvese que la localización de reagrupamientos aparece dos veces en el análisis: en L_e y en L_r; esto se produce en virtud de la dualidad del proceso de comunicación: emisión y recepción.

3.4. *Modelo de una tarea.*

De modo muy general, la localización inicial de informaciones primarias (grafo parcial de L_e, correspondiente al primer caso de la definición) y el grafo de reagrupamiento P, constituyen la *definición mínima de una tarea.* La localización de reagrupamientos puede, o no, ser dada. Si no es dada, el grupo tendrá que elegir, entre las posibles localizaciones, la que por alguna razón es la más apropiada.

Existe otro caso en el que el grupo debe efectuar una elección: si varios miembros del grupo poseen la misma información primaria, no es necesario que cada poseedor de información la emita hacia cada uno de los receptores. El problema es el mismo cuando una información secundaria se obtiene simultáneamente en diversos lugares y debe ser retransmitida.

Consideremos, pues, el caso particular de una tarea T que satisface las tres condiciones siguientes:

T_1 : cada información primaria está localizada inicialmente en un solo punto;

T_2 : los reagrupamientos de informaciones que producen informaciones secundarias están localizados *a priori;*

T_3 : si se retransmite una información secundaria, ésta se obtiene por reagrupamiento en un único punto.

Por definición*, si una tarea T satisface las condiciones T_1 a T_3, el modelo $M(T)$ de esta tarea es el grafo cuya matriz asociada es

$$\| M(T) \| = \| L_e \| \cdot \| P \| \cdot \| L_r \| \cdot$$

$M(T)$ es el conjunto de comunicaciones (directas o indirectas) necesarias y suficientes para llevar a cabo la tarea T, definida por los tres grafos L_e, P y L_r.

Las matrices $\| L_e \|$, $\| P \|$ y $\| L_r \|$ son respectivamente del tipo $(X \times A)$, $(A \times \mathfrak{p}(A))$ y $(\mathfrak{p}(A) \times X)$, siendo $\| M(T) \|$, por consiguiente, una matriz del tipo $(X \times X)$: está asociada a la función M de X consigo misma: $M(T) = (X; M)$.

---

* Esta definición recoge la de Lanzetta y Roby (1955), aunque no utiliza las mismas matrices. Lanzetta y Roby no consideran retransmisible una información secundaria.

De la definición de matriz de multiplicación (Cap. 1, Sec. 6) se sigue que $(x_i, x_j) \in M$ si y sólo si existen $a_h \in A$ y $A_k \in \mathfrak{p}(A)$, tales que

$$(x_i, a_h) \in \Lambda_e \quad (a_h, A_k) \in \Pi \quad \text{y} \quad (A_k, x_j) \in \Lambda_r$$

Si $(x_i, a_h) \in \Lambda_e$, o bien x_i es el posesor inicial (único, por T_1) de la información primaria a_h, o bien x_i ha reagrupado él mismo las informaciones necesarias para obtener una información secundaria a_h; de nuevo x_i es, por tanto, el primer posesor de a_h, especificado (por T_2) y único (por T_3).

Si $(a_h, A_k) \in \Pi$, resulta que a_h es necesaria para el reagrupamiento A_k (o que $A_k = \{a_h\}$, lo cual viene a ser lo mismo, si consideramos que cualquier información es una información secundaria elaborada a partir de sí misma).

Finalmente, si $(A_k, x_j) \in \Lambda_r$, es que x_j debe realizar el reagrupamiento A_k (o recibir a_h: $\{a_h\} = A_k$).

Para concluir brevemente: x_i posee únicamente la a_h necesaria que x_j necesita para el reagrupamiento; como resultado, x_i debe transmitir a_h a x_j. La transmisión (directa o indirecta) de todos los mensajes de este tipo es necesaria para la ejecución de la tarea; y es también suficiente.

La matriz $\|M(T)\|$ puede contener elementos mayores que la unidad: el número (cero o entero positivo) que figura en la casilla (ij) de $\|M(T)\|$ es el número de informaciones poseídas por x_i que deben llegar a x_j.

El grafo $M(T)$ es por tanto un multigrafo, con α componentes, cada uno de los cuales corresponde a una de las α informaciones. Según el caso, consideraremos el multi-grafo $M(T) = (X; M)$, o cada componente $M_h(T) = (X; M_h)$, $h = 1, 2, \ldots \alpha$, o el uni-grafo $M^*(T) = (X; M^*)$ definido por: $(x_i, x_j) \in M^*$ si y sólo si existe al menos un h, $1 \leqq h \leqq \alpha$, tal que $(x_i, x_j) \in M_h$. La matriz $\|M^*(T)\|$ puede obtenerse fácilmente a partir de $\|M(T)\|$ por reducción a la unidad de todos los elementos no nulos.

Si x_i posee inicialmente una información, o la obtiene el mismo por reagrupamiento, y si debe tener esta informacion en el estado final, tenemos

$$(x_i, x_i) \in M^*,$$

pero no constituye una comunicación como en el caso en que $(x_i, x_j) \in M^*$; para conservar la homogeneidad de las convenciones (y tal vez para desarrollos futuros) vale la pena anular todas las casillas en la diagonal, en las diversas matrices asociadas con el modelo, si y sólo si se estipula que el grafo N de la red de comunicación no tiene loop.

En el caso de que una de las condiciones T_1, T_2 o T_3 no sea satisfecha por una tarea T, la tarea no tiene un modelo claramente definido.

Sin embargo, el conjunto de posibles modelos de una tarea puede determinarse si se consideran todas las elecciones que constituyen especificaciones posibles de la tarea. De hecho, si se satisfacen T_1, T_2 y T_3, puede establecerse que el *conjunto de modelos posibles* de la tarea se reduce a un único elemento. Todo grupo de trabajo puede entonces considerarse ante una tarea T, que permite un conjunto $\{M(T)\}$ de modelos de tareas posibles, debiendo elegir el grupo uno de los modelos y realizarlo.

4. ORGANIZACION OPTIMA.

4.1. *Introducción.*

Consideremos un grupo que ha de llevar a cabo una tarea de un modelo fijo $M(T)$, por medio de una red dada N de comunicación.

$M(T)$ es el conjunto de comunicaciones (directas o indirectas) *necesarias* (y suficientes) para la realización de T; N es el conjunto de comunicaciones directas *posibles* (a partir de las cuales puede deducirse el conjunto de comunicaciones indirectas posibles).

En primer lugar deben examinarse las relaciones entre $M(T)$ y N para averiguar si es posible realizar T por medio de N. En caso afirmativo, generalmente es posible de varios modos, cada uno de los cuales se denomina *organización.* La *organización óptima* será elegida en virtud de un criterio que generalmente es el coste global de las operaciones según la organización considerada. Señalaremos unos cuantos elementos de una solución al problema de la organización óptima, pero, como se verá, estamos todavía lejos de saber tanto como sería deseable.

4.2. *Posibilidad de realización de una tarea.*

Si $M(T)$ indica que debe transmitirse una información a_h desde x_i a x_j, esta parte de la tarea puede ser realizada en la red N si y sólo si existe en N un camino $\gamma(x_i x_j)$.

Para desarrollos subsecuentes es útil establecer la evidencia anterior en un lenguaje más elaborado, debido a B. Roy (1961).

Consideremos un grafo $G = (X; U)$, siendo U el conjunto de arcos de G. El *cierre* μ - *transitivo* de G es el grafo $\mu(G) = (X; \mu(U))$ obtenido a partir de G al establecer $(x_i, x_j) \in \mu(U)$ si y sólo si existe en G un camino $\gamma(x_i x_j)$. La figura 2.3 representa un grafo G y su cierre $\mu(G)$. Si se tiene la matriz $E(G)$ de las desviaciones de G, puede obtenerse la matriz $\| \mu(G) \|$ asociada a $\mu(G)$ por reducción a la unidad de todos los elementos de $E(G)$ no nulos y no infinitos.

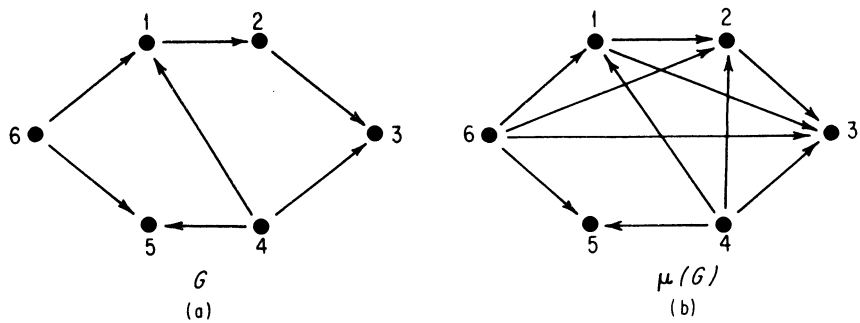


FIGURA 2.3

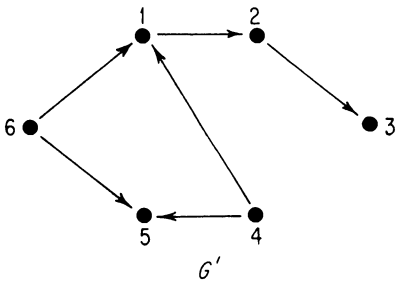
μ es efectivamente una operación de cierre en cuanto que posee las cuatro propiedades que la definen (Berge, 1959, p. 13).

Monótonamente creciente: $U \subset \mu(U)$;
isotonía: $U \subset U' \Rightarrow \mu(U) \subset \mu(U')$;
idempotencia: $\mu[\mu(U)] = \mu(U)$;
invarianza del conjunto vacío: $U = \phi \Rightarrow \mu(U) = \phi$.

La demostración de estas propiedades es directa.

El cierre μ - transitivo induce sobre el conjunto de grafos de n puntos una relación de equivalencia: $G = (X; U)$ y $G' = (X; U')$ son μ - equivalentes si y sólo si $\mu(G) = \mu(G')$. Esta relación es efectivamente de equivalencia puesto que se define por la equivalencia sobre los cierres μ y dado que es único el cierre μ de un grafo. La figura 2.4 muestra un grafo G' μ - equivalente al grafo G presentado en la figura 2.3.

El conjunto de grafos de una clase de μ - equivalencia constituye una semilaticia de unión; efectivamente, G y $\mu(G)$ son μ - equivalentes (idempotencia del cierre) y $\mu(G)$ es el límite superior de la clase, puesto que $G \subset \mu(G)$ (el cierre es monótonamente creciente). Por otra parte, si G y G' son μ - equivalentes, ambos son μ - equivalentes a su unión $(G \cup G')$; en efecto, tenemos que



$\mu(G') = \mu(G)$ [cf Fig. 2·3]

FIGURA 2.4

$$(x_i, x_j) \in \mu(G) \Rightarrow \gamma(x_i x_j) \in G \Rightarrow \gamma(x_i x_j) \in (G \cup G')$$
$$\Rightarrow (x_i, x_j) \in \mu(G \cup G');$$

de aquí que $$\mu(G) \subset \mu(G \cup G').$$

Tenemos también

$$(x_i, x_j) \in \mu(G \cup G') \Rightarrow \gamma(x_i x_j) \in (G \cup G').$$

Debemos tener en cuenta dos casos:

1. $\gamma(x_i x_j) \in G$ (respectivamente: G') $\Rightarrow (x_i, x_j) \in \mu(G)$ (respectivamente: $\mu(G')$);

2. $\gamma(x_i x_j) \notin G$ y $\notin G'$: $\gamma(x_i x_j)$ está compuesto por unos segmentos que pertenecen sólo a G y por otros que únicamente pertenecen a G'; pero a cada segmento (x, y) de G correspondería un camino $\gamma(xy)$ en G', puesto que $\mu(G) = \mu(G')$; por lo cual este segundo caso no puede darse; por tanto

$$\mu(G \cup G') \subset \mu(G)$$

y finalmente, $\mu(G) = \mu(G') = \mu(G \cup G')$.

En general, sin embargo, $\mu(G \cap G') \neq \mu(G)$; esto ocurre si para al menos un par (x_i, x_j) no hay un solo camino $\gamma(x_i x_j)$ único que está simultáneamente en G y G', lo cual es frecuente.

G_0 es un grafo μ - *mínimo* si *todos* los grafos incluidos estrictamente en G_0 son no μ - equivalentes a G_0; en particular, si G_0 es μ - mínimo, la supresión de *cualquier* arco en G_0 genera un grafo que ya no es μ - equivalente. Se puede ver fácilmente en la figura 2.4 que G' es μ - mínimo.

Consideremos un grafo $G=(X; U)$; si $G_0=(X; U_0)$, (1) está incluido en G, (2) es μ - equivalente a G y (3) es μ - mínimo, entonces se dice que la familia de arcos $V=U-U_0$ es *suprimible*. Esta familia V puede ser suprimida sin alterar ninguna de las propiedades de conexidad del grafo G. Estos análisis completan, pues, el llevado a cabo por Luce (1952b, 1953; cf. Cap. 1, Sec. 7.3).

Si nos damos cuenta de que el cierre μ - transitivo de un grafo N asociado a una red de comunicación no es sino la representación de las *comunicaciones posibles directa o indirectamente* en N, se hace patente la importancia de las nociones introducidas por B. Roy. La investigación en curso parece indicar que éstas son indispensables para el desarrollo de la teoría de redes, que será esbozada brevemente en las próximas páginas.

Lo expuesto al principio de esta sección puede ahora expresarse de modo diferente: una tarea T puede ser realizada en una red N si y sólo si

$$M^*(T) \subset \mu(N).$$

Obsérvese que, si N es fuertemente conexa, $\mu(N)$ es el grafo completamente simétrico que incluye a todos los posibles grafos; cualquier tarea puede entonces ser realizada en N.

En los parágrafos siguientes se dará por supuesto que la tarea propuesta al grupo puede ser efectuada dentro de la red de comunicación disponible y que el modelo de la tarea es perfectamente conocido.

4.3. *Determinación de la organización óptima.*

El modelo de la tarea, para cada información a_h, se reduce a $M_h(T)$; puede ser resumido por la formación de dos subconjuntos de X: el conjunto E_h que comprende los puntos capaces de emitir a_h (posesores iniciales si a_h es una información primaria, o puntos de reagrupamiento en los que se obtiene a_h si se trata de una información secundaria); y el conjunto R_h, que comprende los puntos que reciben a_h (con fines de reagrupamiento o como localización final).

Las condiciones T_1 a T_3 pueden cambiarse (Sec. 3.4) estableciendo para todo a_h

$$|E_h|=1 .$$

Hemos visto que estas condiciones eran necesarias para la definición inequívoca del modelo de tarea. Mostraremos, no obstante, que, en virtud de un artificio algorítmico, puede equipararse el caso $|E_h|>1$ al caso $|E_h|=1$, en el problema de la determinación de la organización óptima y, eventualmente así, contar con un criterio para la elección de un modelo entre todos los posibles.

No conocemos todavía un sistema tan fácil para el caso de que no se satisfaga la condición T_2.

La información a_h debe transmitirse desde E_h a todos los puntos de R_h; esto se puede lograr, en general, de diversos modos, cada uno de los cuales constituye una parte de la organización (relativa a a_h).

Cada uno de estos modos puede representarse por un grafo O_h, que es un grafo parcial de N:

$$O_h = (X, \Omega_h), \quad \text{con} \quad (x_i, x_j) \in \Omega_h$$

si y sólo si la información a_h va a través del canal (x_i, x_j).

Si se asigna al grafo N una valoración que representa los costes del uso de los canales, el coste de la organización considerada no es sino

$$c_h = \sum_{(x_i,x_j) \in \Omega_h} v(x_i x_j).$$

Por consiguiente, la búsqueda de la organización óptima consiste en la determinación de una organización O_h, tal que c_h sea mínimo.

(α) *Caso en que* $|E_h| = |R_h| = 1$. Sea x el único emisor inicial posible de a_h e y el único receptor necesario de a_h.

$$E_h = \{x\}; \quad R_h = \{y\}; \quad x, y \in X.$$

Hay que encontrar los caminos de longitud mínima entre todos los caminos $\gamma(xy) \in N$, es decir, aquellos cuyo coste de utilización es mínimo; los caminos mínimos son, por definición (Cap. 1, Secs. 6.3 y 9), las pistas $\theta(xy)$.

Sea $\Theta(xy)$ el grafo parcial de N, definido por: $(x_i, x_j) \in \Theta(xy)$ si y sólo si

Θ_1 : $(x_i, x_j) \in N$;

Θ_2 : $e(xx_i) + e(x_i y) = e(xx_j) + e(x_j y) = e(xy)$

Θ_3 : $e(xx_i) + v(x_i x_j) = e(xx_j)$.

TEOREMA 2.1 *Todas las pistas* $\theta(xy)$ *de* N *figuran en* $\Theta(xy)$ *y todo camino máximo de* $\Theta(xy)$ *es una pista* $\theta(xy)$ de N.

Prueba. Un teorema de Bratton (1955) (cf. Berge, 1958, Cap. 13, Teorema 4) establece que todo segmento conexo de una pista es una pista; por consiguiente, si x_i es parte de una pista $\theta(xy)$, el segmento (x, x_i) de esta pista es una pista $\theta(xx_i)$ de longitud $e(xx_i)$; de modo similar, el segmento (x_i, y) es de longitud $e(x_i y)$; de aquí que

$$e(xx_i) + e(x_i y) = e(xy).$$

Recíprocamente, si el camino $\gamma(xy)$, resultante de la sucesión de una pista $\theta(xx_i)$ y de una pista $\theta(x_i y)$, tiene longitud $e(xy)$, este camino es una pista de $\theta(xy)$ que pasa por x_i. Por tanto, un punto x_i es parte de una pista $\theta(xy)$ si y sólo si se satisface la condición Θ_2 (x e y satisfacen siempre esta condición).

Por otra parte, si un camino $\gamma(x...x_i x_j...y)$ es una pista $\theta(xy)$, en virtud del teorema de Bratton, siendo consecutivos x_i y x_j en este camino, los segmentos (x, x_i), (x_i, x_j) y (x_j, y) son pistas y

$$e(xx_i) + e(x_i x_j) + e(x_j y) = e(xy),$$

con $e(x_i x_j) = v(x_i x_j)$. Recíprocamente, si x_i y x_j son cada uno parte de una pista

$\theta(xy)$, si se satisface Θ_2 y si

$$e(xx_i)+v(x_ix_j)=e(xx_j)\ ,$$

el camino $\gamma(x...x_ix_j...y)$, formado por una pista $\theta(xx_i)$, el arco (x_i, x_j) y una pista $\theta(x_jy)$ tiene por longitud

$$e(xx_i)+v(x_ix_j)+e(x_jy)=e(xx_j)+e(x_jy)=e(xy)\ ,$$

por Θ_2 y este camino es una pista $\theta(xy)$.

La condición Θ_1 puede ser incluida en Θ_3 estableciendo:

$$v(x_ix_j)=\infty \Leftrightarrow (x_i,x_j)\notin N\ .$$

Determinación de desviaciones en un grafo valorado. Anteriormente (Cap. 1, Sec. 6.2) fue presentado un método de marcaje para encontrar las desviaciones en un grafo no valorado. Ahora se presenta un metodo generalizado.

Para encontrar las desviaciones desde un punto $x \in X$ a todos los demás puntos de X, utilizamos un doble marcaje, $\{k; q\}$:

1. Marcar x: $\{k=0; q(x)=0\}$;
2. Si X es marcado $\{k; q(y)\}$, examinar sucesivamente todos los $z \in \Gamma y$:
   (α) si todavía no ha sido marcado z, marcarlo $\{(k+1);\ q(z)=q(y)+v(yz)\}$;
   (β) si z está ya marcado $\{k'; q'(z)\}$ (necesariamente $k' \leqslant k$), deben considerarse dos casos:
   (β_1) si $q'(z)<q(y)+v(yz)$, no cambiar el marcaje de z;
   (β_2) si $q'(z)\geqslant q(y)+v(yz)$, cambiar el marcaje de z por
   $$\{(k+1);\ q(z)=q(y)+v(yz)\}\ ;$$
3. Cesar en cuanto ningún punto pueda ser marcado en la etapa $(k+1)$; se obtiene entonces $e(xy)=q(y)$ para los puntos marcados y $e(xy)=\infty$ para los demás puntos.

En la práctica se efectúa el marcaje en una tabla que se añade a la matriz asociada al grafo; averigüemos, por ejemplo, la desviación de f en el grafo N de la figura 2.5:

$\|N\|=$

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a		4		2						
b			2						3	
c				6			3			
d	3								5	
e		2		6		1		6		
f			5							1
g					1	3				
h				4						2
i			4		2					
j							4	5		

$k =$

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
0						0				
1			5							1
2				~~11~~			~~8~~ 5	6		
3	~~14~~			10	6				~~16~~	
4	13	~~18~~ 8							~~15~~	
5									11	
6										

$e(f.) =$

13	8	5	10	6	0	5	6	11	1

Construcción práctica de $\Theta(xy)$. Se busca el conjunto $\{e(x.)\}$ de las desviaciones de x desde los puntos de X y el conjunto $\{e(.y)\}$ de desviaciones de los puntos de X desde y; se suma término a término hasta obtener $e(xx_i)+e(x_iy)$ y se retienen los puntos que satisfacen Θ_2. Entonces se ordenan estos puntos x_i como una función de la desviación $e(xx_i)$ y se identifican, para cada punto, comenzando por x, los arcos que van desde este punto a los siguientes puntos que satisfacen Θ_3.

Ejemplo. Consideremos el grafo N de la figura 2.5, cuya matriz es la siguiente:

$E(N) =$

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a	0	4	6	2	9	10	9	15	7	11
b	11	0	2	8	5	6	5	11	3	7
c	9	6	0	6	4	5	3	10	9	6
d	3	7	9	0	7	8	12	13	5	9
e	13	2	4	10	0	1	6	6	5	2
f	13	8	5	10	6	0	5	6	11	1
g	14	3	5	11	1	2	0	7	6	3
h	7	9	11	4	7	8	6	0	9	2
i	13	4	4	10	2	3	7	8	0	4
j	12	7	9	9	5	6	4	5	10	0

Hemos de encontrar $\Theta(ah)$:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
$e(a.)=$	0	4	6	2	9	10	9	15	7	11
$e(.h)=$	15	11	10	13	6	6	7	0	8	5
	15	15	16	15	15	16	16	15	15	16

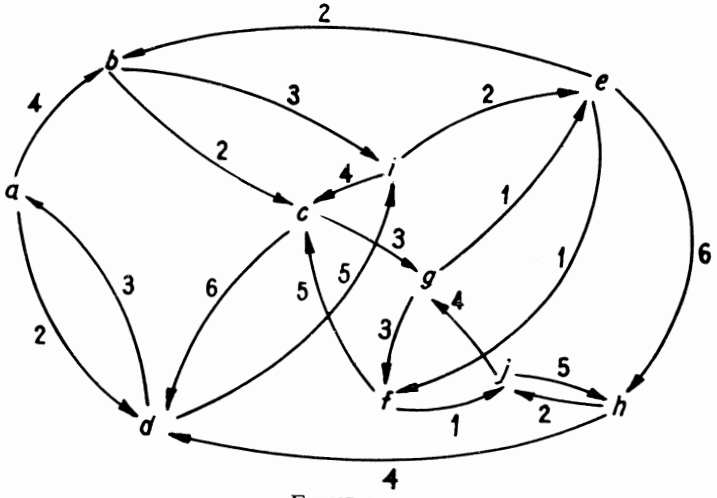


FIGURA 2.5

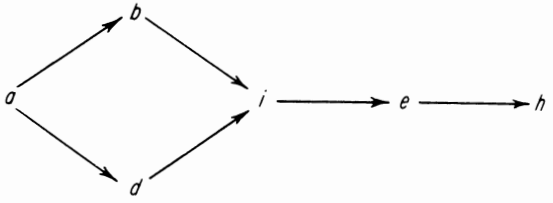
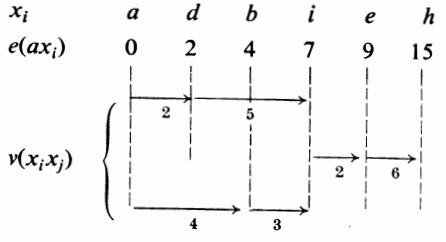


FIGURA 2.6

Los puntos *a*, *b*, *d*, *h* e *i* satisfacen Θ_2.



En consecuencia tenemos las dos pistas $\theta(ah)$ (cf. fig. 2.6):

a d i e h y *a b i e h*.

(β) *Caso en que* $|E_h| > 1$ y $|R_h| = 1$. Si diversos puntos poseen inicialmente la información a_h, es suficiente que ésta sea emitida en la dirección del punto R_h por uno solo de los puntos.

El coste mínimo de la operación se mide, para cada punto $x_i \in E_h$, por medio de la desviación de x_i desde el único punto y de R_h; se elegirán los x_i tales que:

$$e(x_i y) = \min_{x \in E_h} \{ e(xy) \}.$$

Una vez realizada esta elección, se llega al problema precedente.

Sin embargo, debido a los casos en que $|R_h| > 1$, es útil presentar el problema de modo diferente. A partir del grafo $N = (X; \Gamma)$, construimos un grafo $N_0 = (X_0; \Gamma_0)$, tal que

1. $X_0 = X \cup \{x_0\}$, $x_0 \notin X$;
2. si $x_i, x_j \in X$, $(x_i, x_j) \in \Gamma \Rightarrow (x_i, x_j) \in \Gamma_0$;
3. si $x_i \in E_h$, $(x_0, x_i) \in \Gamma_0$ y $v(x_0 x_i) = 0$.

Esta construcción resultará más concreta si imaginamos un individuo x_0 fuera del grupo, que posee sólo la información a_h y puede transmitirla solamente a los miembros del grupo que constituyen E_h; esta transmisión puede ser hecha sin coste alguno.

Encontrar, en N_0, las pistas de x_0 a y, $\{y\} = R_h$, es evidentemente la solución al problema. Denotaremos el conjunto de tales pistas $\theta(x_0 y)$ por $\Theta_0(E_h; y)$.

Existe otra ventaja en este método: si la relación

$$e(x_i y) = \min_{x \in E_h} \{e(xy)\}$$

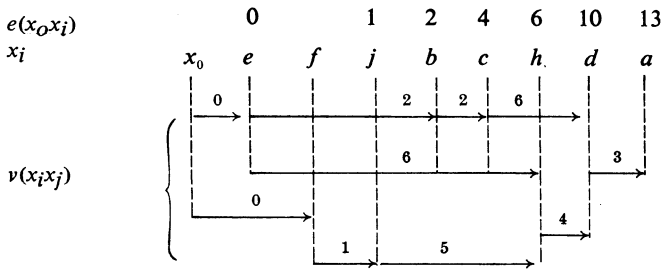
denota más de un punto de E_h, $\Theta_0(E_h; y)$ ofrece el conjunto completo de soluciones con sólo una aplicación del algoritmo.

Ejemplo. Definimos $E_h = \{e, f\}$ y $R_h = \{a\}$ en el grafo N de la figura 2.5. Tenemos que $e(ea) = e(fa)$. Para obtener el conjunto completo de soluciones debemos buscar $\Theta(ea)$ y $\Theta(fa)$. Situémonos en N_0 y apliquemos el algoritmo. Es evidente que para todo $x_i \in X$,

$$e(x_0 x_i) = \min_{x \in E_h} \{e(x x_i)\}.$$

En consecuencia, la tabla es:

	x_0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$e(e.)$		13	2	4	10	0	1	6	6	5	2
$e(f.)$		13	8	5	10	6	0	5	6	11	1
$e(x_0.)$	0	13	2	4	10	0	0	5	6	5	1
$e(.a)$	13	0	11	9	3	13	13	14	7	13	12
	13	13	13	13	13	13	13	19	13	18	13



Las soluciones son las tres pistas (cf. fig. 2.7)

$$e\,b\,e\,d\,a, \quad e\,h\,d\,a, \quad f\,j\,h\,d\,a.$$

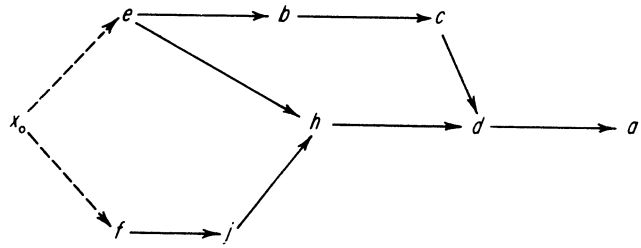


FIGURA 2.7

Para obtener las tres soluciones, sin utilizar N_0, sería necesario aplicar el algoritmo dos veces.

(γ) *Caso en que* $|R_h| > 1$. Por la introducción del grafo N_0, podemos siempre considerar que $|E_h| = 1$, lo cual daremos por supuesto de ahora en adelante.

Pasar de $|R_h| = 1$ a $|R_h| > 1$ no es análogo en absoluto a pasar de $|E_h| = 1$ a $|E_h| > 1$: no era necesario que fuera emitida la información desde todos los puntos de E_h, pero sí es necesario que todos los puntos de R_h reciban a_h.

Debe, pues, hallarse una arborescencia (cf. Cap. 1, Secs. 5.6 y 9) con raíz x, si $E_h = \{x\}$, que contenga *todos* los puntos de R_h, incluyendo, si es necesario, otros puntos de X. La suma de valoraciones de los arcos que forman la arborescencia se denomina *longitud total* de la arborescencia. Debemos, pues, encontrar, entre todas las arborescencias con raíz x y que contienen R_h, las arborescencias de *longitud total mínima.* Es absolutamente insuficiente considerar sólo las pistas que conducen desde $\{x\} = E_h$ a cada punto de R_h. Sea, en el grafo N de la figura 2.5, $E_h = \{i\}$ y $R_h = \{h, g\}$. Utilizando el método descrito previamente, se encuentra que $\Theta(ih)$ y $\Theta(ig)$ están cada una reducida a una única pista *ieh* y *icg.* La arborescencia de la figura 2.8, con raíz i y que contiene h y g, resulta de la unión de estas dos pistas; la longitud total de esta arborescencia es 15. En cambio; la figura 2.9 muestra otra arborescencia con raíz i, conteniendo g y h, cuya longitud total es 13; esta segunda arborescencia es, por tanto, mejor que la primera (efectivamente, se verá más tarde que constituye la solución al problema).

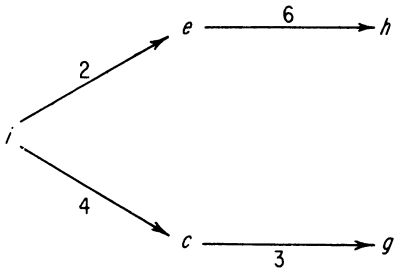


FIGURA 2.8

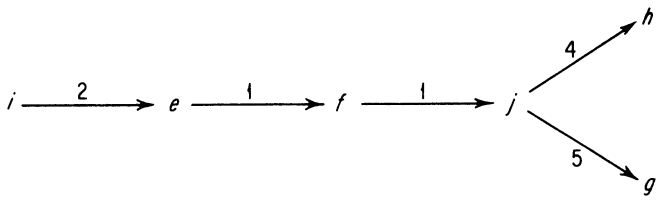


FIGURA 2.9

Queda por decir que actualmente no existe un método general satisfactorio. Examinaremos primero el *caso de Kruskal,* muy peculiar matemáticamente, pero bastante importante para nosotros; después examinaremos el caso en que $|R_h|=2$; finalmente, bosquejaremos una generalización del método para la solución del caso $|R_h|>2$.

(δ) *Caso de Kruskal.* Kruskal (1956) ofrece una solución a nuestro problema en un caso muy especial:

K_1 : el grafo N es simétrico:

$$(x_i,x_j)\in\Gamma \Leftrightarrow (x_j,x_i)\in\Gamma;$$

K_2 : para todo i y todo j, $v(x_ix_j)=v(x_jx_i)$. Bajo estas dos condiciones N puede ser considerado como un grafo *no orientado* valorado y referirse a *aristas.*

K_3 : dos aristas tienen siempre diferentes valoraciones;

K_4 : $R_h=X$.

La mayoría de las redes de comunicación son simétricas (K_1) y con mucha frecuencia dos canales recíprocos tienen la misma valoración (K_2). Por otra parte, varias informaciones deben ser transmitidas en el grupo entero (K_4). El caso de Kruskal tiene, por consiguiente, interés. Sólo K_3 puede presentar dificultades, especialmente si N no está valorado (es decir, si todas las aristas tienen la misma valoración).

Kruskal proporciona varios algoritmos encaminados al descubrimiento de un árbol (no orientado) de longitud total mínima y que contenga todos los puntos de X; muestra también que este árbol es *único.* Uno de los algoritmos es el siguiente.

Repetir las siguientes operaciones tantas veces como sea posible: elegir, entre las aristas todavía no elegidas, aquella con valoración mínima, que no forma un círculo con las aristas ya elegidas. Una vez obtenido el árbol, basta orientar las aristas que parten de x, $\{x\}=E_h$, para conseguir una arborescencia de longitud total mínima, de raíz x, conteniendo todos los puntos de X.

Si N no está valorado, evidentemente no se satisface K_3, pero el problema es muy simple. Se sabe (Berge, 1958, Cap. 16, teorema 4) que las siguientes propiedades son equivalentes para la caracterización como árbol de un grafo G:

A_1: G es conexo y cuando se le suprime cualquier arista deja de serlo;

A_2: G es conexo y contiene sólo $(n-1)$ aristas.

A_1 puede expresarse así: A'_1–G es conexo y μ–mínimo (cf. Sec. 4.2). En virtud de A_2 la longitud total de cualquier árbol de n puntos es $(n-1)$ y, por tanto, cualquier árbol es solución del problema.

Para encontrar todas las soluciones se puede, o bien buscar todos los grafos μ–mínimos conexos incluidos en N, o bien ordenar las aristas de N de todas las maneras posibles, asignando a las aristas, para cada orden, un valor basado en su rango y aplicar finalmente el algoritmo de Kruskal.

(ϵ) *Caso en que* $|R_h| = 2$. Denotemos por $\theta(x; R_h)$ toda arborescencia de longitud total mínima, raíz x y que contenga todos los puntos de R_h. Si $R_h = \{y_1, y_2\}$, entonces toda arborescencia mínima $\theta(x; y_1y_2)$ será representada por uno de los diagramas de la figura 2.10 (en la que las flechas representan caminos y no arcos). Los tres últimos diagramas se reducen al primero, estableciendo, respectivamente,

$$z = x \qquad z = y_1 \qquad z = y_2 \ .$$

El punto z será llamado *ramificación de la arborescencia*; evidentemente es único.

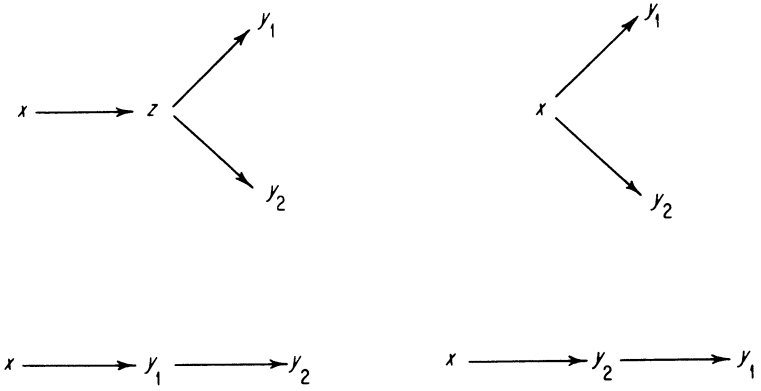


FIGURA 2.10

TEOREMA 2.2. *En una arborescencia mínima* $\theta(x; y_1y_2)$ *con una ramificación* z, *los caminos* $\gamma(xz)$, $\gamma(xy)$ y $\gamma(zy_2)$ *son pistas.*

Es evidente; de lo contrario la arborescencia no tendría longitud total mínima.

TEOREMA 2.3. *Si z es la ramificación de una arborescencia mínima $\theta(x; y_1 y_2)$, dos pistas cualesquiera $\theta(zy_1)$ y $\theta(zy_2)$ tienen un y sólo un punto en común: el punto z.*

Prueba. Es evidente que z es común a $\theta(zy_1)$ y $\theta(zy_2)$. Supongamos que también lo sea z'; la arborescencia considerada $\theta(x; y_1 y_2)$ tiene la longitud (de acuerdo con el teorema precedente):

$$e(x; y_1 y_2) = e(xz) + e(zy_1) + e(zy_2);$$

pero $$e(zy_1) = e(zz') + e(z'y_1)$$

y $$e(zy_2) = e(zz') + e(z'y_2);$$

por tanto $$e(x; y_1 y_2) = e(xz) + 2e(zz') + e(z'y_1) + e(z'y_2).$$

Supongamos ahora que tenemos una arborescencia constituida por las pistas $\theta(xz)$, $\theta(zz')$, $\theta(z'y_1)$ y $\theta(z'y_2)$; su longitud es

$$e(xz) + e(zz') + e(z'y_1) + e(z'y_2),$$

la cual es menor que la longitud de $e(x; y_1 y_2)$, salvo que $e(zz') = 0$, es decir, salvo que $z = z'$.

Para sistematizar la notación introducida anteriormente, denotaremos la longitud total de una arborescencia mínima por $e(x; R_h)$. En cierto modo es la desviación de x a partir de R_h.

TEOREMA 2.4. *Dado $\theta(x; y_1 y_2)$ con una ramificación z, x_i pertenece a una pista $\theta(xz)$ si y sólo si*

$$e(xx_i) + e(x_i; y_1 y_2) = e(x; y_1 y_2).$$

Puede probarse de modo análogo al caso de la proposición Θ_2 (cf. Teorema 2.1).

TEOREMA 2.5. $e(x_i; y_1 y_2) \leqq e(x_i y_1) + e(x_i y_2)$. (Evidente)

Por medio de los teoremas 2.2 y 2.5 se justifica fácilmente el siguiente algoritmo. Lo descomponemos en dos partes: hallamos $e(x; y_1 y_2)$; hallamos las arborescencias mínimas $\theta(x; y_1 y_2)$. Procedemos por estimaciones sucesivas de $e(x_i; y_1 y_2)$ para todo $x_i \in X$; la primera estimación la da, evidentemente, el teorema 2.5.

Algoritmo para hallar $e(x; y_1 y_2)$.

1. Calcular, para todo $x_i \in X$,
$$e(x_i y_1) + e(x_i y_2),$$
que es la primera estimación de $e(x_i; y_1 y_2)$.
2. Elegir un punto de R_h, por ejemplo y_1; se tiene
$$e(y_1; y_1 y_2) = e(y_1 y_2)$$
3. Calcular, para todo $x_j \in \Gamma^{-} x_i$,
$$v(x_j x_i) + e(x_i; y_1 y_2).$$
Comparar este valor con el estimado de $e(x_1; y_1 y_2)$ anteriormente; tomar el valor menor como nueva estimación de $e(x_i; y_1 y_2)$.
4. Detener el proceso en cuanto no se obtiene ningún nuevo valor. La última estimación de $e(x_i; y_1 y_2)$ es una estimación exacta.

Ejemplo. Hallar $e(i; gh)$ en el grafo N de la figura 2.5. El algoritmo se resume en la siguiente tabla, en la cual no se indican, a excepción de la primera, las reproducciones de estimaciones precedentes; no es necesario considerar los siguientes de puntos correspondientes, puesto que ya han sido utilizados.

x_i	$e(x_i g)$	$e(x_i h)$	$e(x_i g) + e(x_i h)$	Estimaciones sucesivas $e(x_i; gh)$					$e(x_i; gh)$
a	9	15	24			16			16
b	5	11	16		12				12
c	3	10	13	10					10
d	12	13	25			19		18	18
e	6	6	12			~~12~~ 11			11
f	5	6	11		~~11~~ 10				10
g	0	7	7 7						7
h	6	0	6		6				6
i	7	8	15		14		13		13
j	4	5	9	9					9

Algoritmo para hallar $\theta(x; y_1y_2)$.

1. Calcular, para todo $x_i \in X$,
$$e(xx_i) + e(x_i; y_1y_2).$$
Los x_i para los cuales este valor es igual a $e(x; y_1y_2)$ pertenecen a una pista que va de x a la ramificación de una arborescencia mínima $\theta(x; y_1y_2)$. Entre los puntos así obtenidos, consideraremos puntos z de ramificación, tales que
$$e(z; y_1y_2) = e(zy_1) + e(zy_2)$$
2. Hallar las pistas (cf. Sec. 4.3)
$$\theta(xz),\ \theta(zy_1) \text{ y } \theta(zy_2).$$

Ejemplo. Hallar las arborescencias mínimas: $\theta(i; gh)$.

x_i	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
$e(ix_i)$	13	4	4	10	2	3	7	8	0	4
$e(x_i; gh)$	16	12	10	18	11	10	7	6	13	9
	29	16	14	28	13	13	14	14	13	13

Los puntos e, f, i y j pertenecen a una pista que va desde i hasta una ramificación. Sólo j es una ramificación.

$e(ix_i)$	0	2	3	4
x_i	i	e	f	j
	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	
	2	1	1	

En el grafo de la figura 2.5 puede verse inmediatamente que el conjunto de pistas $\theta(jg)$ y $\theta(jh)$ se reducen a los arcos (j, g) y (j, h). Hemos mostrado en la figura 2.9 la arborescencia mínima $\theta(i; gh)$, única en este caso.

(ζ) *Caso en que* $|R_h| > 2$. Si el método anterior fuera directamente generalizado, dando a la primera estimación de $e(x_i; R_h)$ el valor

$$\sum_{y \in R_h} e(x_i y),$$

ello supondría una única ramificación z, como en la figura 2.11. Sin embargo, la figura 2.12 puede ser una buena representación de la arborescencia mínima $\theta(x; R_h)$.

En el caso de la figura 2.12, debe primero hallarse $e(x; y_1 y_2)$ y, después, $e(x; y_1 y_2 y_3)$, tomando como primera estimación $e(x; y_1 y_2) + e(x y_3)$. En cambio, en el caso representado en la figura 2.13, debe hallarse primero $e(x; y_2 y_3)$. En el caso de la figura 2.14 debe comenzarse por $e(x; y_1 y_3)$ ...

Puesto que el caso concreto no se conoce de antemano y dado que podemos encontrar diversos casos simultáneamente, deben tratarse todos los casos sucesivamente.

1. Hallar $e(x; y_i y_j)$ para todo par de puntos $y_i y_j$ de R_h.
2. Añadir cada par, sucesivamente, cada punto $y_k (k \neq i, j)$ de R_h y aplicar el algoritmo con, como primera estimación,

$$e(x_i; y_i y_j) + e(x_i y_k).$$

Para cada terna $y_i y_j y_k$ e obtienen tres estimaciones de $e(x_i; y_i y_j y_k)$ una de $y_i y_j$, otra de $y_i y_k$ y, la tercera, de $y_j y_k$); el menor de estos tres valores es exactamente

$$e(x_i; y_i y_j y_k).$$

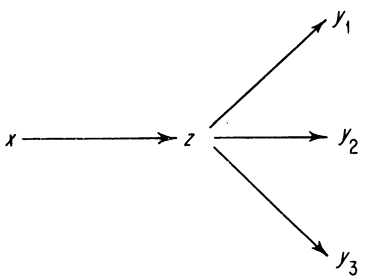


FIGURA 2.11

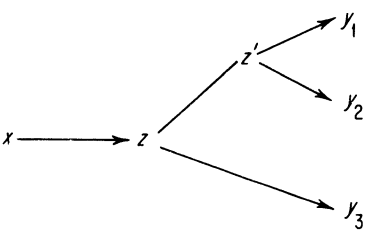


FIGURA 2.12

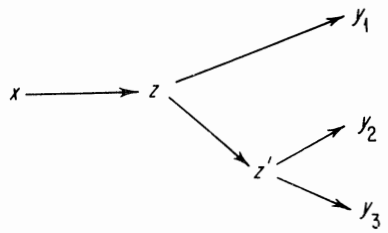


FIGURA 2.13

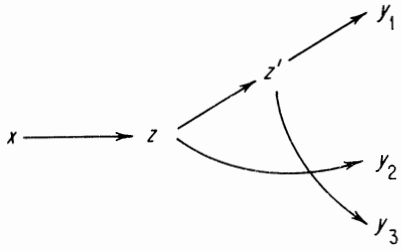


FIGURA 2.14

3. Pasar de ternas a cuaternas como se pasa de pares a ternas hasta agotar R_h.

Es obvio que el método resuelve el problema y resulta todavía más claro que es deseable un método más práctico.

Obsérvese, sin embargo, que en caso de tener que resolver varios problemas análogos (transmisión de varias informaciones: a_h, a_i, ...), puede no ser necesario efectuar el trabajo cada vez: si $R_h = \{ y_1, y_2, y_3 \}$ y $R_i = \{ y_2, y_3, y_4 \}$, hallar $e(x_i; y_2y_3)$ sirve para ambos problemas.

(η) *Elección de un punto de reagrupamiento óptimo.* Hasta ahora hemos considerado tareas que satisfacían la condición T_2 (cf. Sec. 3.4): el punto de reagrupamiento que da lugar a una información secundaria fue establecido *a priori*. Ahora puede ser abordado el caso en que no se satisface esta condición. Nos encontramos ante la situación siguiente:

1. Un subconjunto A_h de informaciones es dado; cada una de estas informaciones es inicialmente poseída por un solo miembro del grupo (ahora sabemos que siempre podemos retrotraernos a este caso).
2. Los componentes de A_h deben ser reagrupados *en un cierto punto* para obtener una información a_h.
3. Esta información secundaria a_h debe llegar a todos los puntos del conjunto R_h.
4. El punto de reagrupamiento debe elegirse de tal forma que sea mínimo el coste de todas las comunicaciones necesarias.

Sea $A_h = \{ a_1, a_2 \}$, siendo x_1 el único posesor inicial de a_1 y x_2 el de a_2; sea además $R_h = \{y_1,y_2\}$. Tomemos z como lugar de reagrupamiento. La operación puede ser representada por un multigrafo (un tipo de arco conforme a las informaciones en juego: aquí, tres), como el de la figura 2.15.

Evidentemente, la información secundaria a_h será trasmitida de z a R_h, a través de una de las arborescencias mínimas $\theta(z; R_h)$. La información que constituye A_h seguirá a z por medio de las pistas $\theta(x_1z)$ y $\theta(x_2z)$.

Podemos dar un algoritmo para hallar un *único* punto de reagrupamiento óptimo. Esto es posible porque el algoritmo para encontrar una arborescencia de longitud total mínima procede inicialmente sin especificar la raíz de la arborescencia: hallamos $e(x; R_h)$ para todo $x \in X$.

Sea X_h el conjunto de puntos en el que está localizada una información A_h. Si A_h ha sido reagrupada en el punto z, el coste de las operaciones es

$$C_z = \sum_{x \in X_h} e(xz) + e(z; R_h) .$$

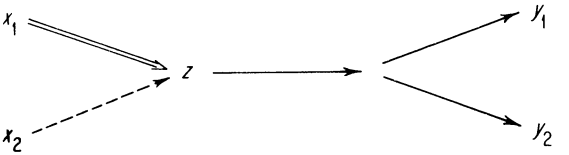


FIGURA 2.15

Todos los términos de esta expresión son conocidos por los algoritmos precedentes; basta elegir, por consiguiente, un punto z_0 tal que

$$C_{z_0} = \min_{z \in X} \{C_z\}.$$

Es entonces suficiente estudiar las pistas $\theta(xz_0)$ para todo $x \in X_h$ y las arborescencias mínimas $\theta(z_0; R_h)$.

Ejemplo. Hallar el punto de reagrupamiento óptimo del grafo de la figura 2.5, para $X_h = \{a, c\}$ y $R_h = \{g, h\}$.

Los valores que figuran a continuación han sido ya calculados:

z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$e(az)$	0	4	6	2	9	10	9	15	7	11
$e(ez)$	13	2	4	10	0	1	6	6	5	2
$e(z; gh)$	16	12	10	18	11	10	7	6	13	9
C_z	29	18	20	30	20	21	22	27	25	22

En consecuencia, b es el punto de reagrupación óptima.

Hallar las pistas y la arborescencia conduce a la solución (única en este caso) representada en la figura 2.16. Obsérvese que e pertenece simultáneamente a X_h y a $\theta(b; gh)$; se podría pensar que el reagrupamiento en e fuera el más económico, pero no es así.

Debemos insistir que este método puede utilizarse sólo si el reagrupamiento A_h se produce en un *único punto* (restricción que se da en muchos grupos pero que no es general).

La figura 2.17 muestra un caso en que la solución de reagrupamiento en un único punto es imposible si estipulamos que

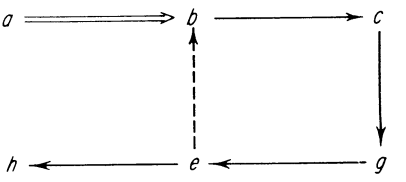


FIGURA 2.16

$X_h = \{x_1, x_2\}$ y que $R_h = \{y_1, y_2\}$: evidentemente, z y z' tendrán cada uno que reagrupar A_h y dirigir a_h a y_1 e y_2 respectivamente.

En el grafo de la figura 2.18, el mismo problema tiene dos soluciones: la precedente, con un coste igual a 9; y un reagrupamiento único en z, siendo transmitida a_h de y_1 a y_2; el coste de esta solución es 10: no es óptima.

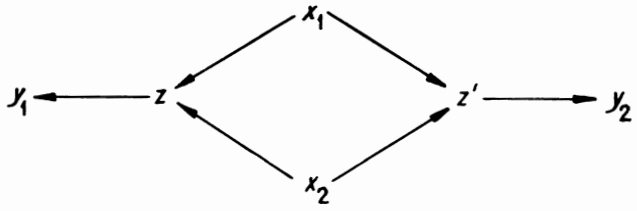


FIGURA 2.17

Consecuentemente, el método propuesto no resuelve enteramente la generalidad de los casos de nuestro problema.

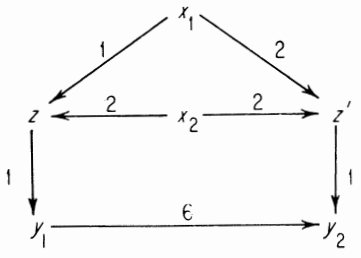


FIGURA 2.18

4.4. *Otros aspectos del problema.*

(α) *Duplicación de mensajes.* Hasta ahora hemos considerado implícitamente que el coste de reproducción de un mensaje no era tenido en cuenta en la valoración de la red N, lo cual no siempre es posible. En ciertos casos las informaciones tienen el carácter material de documentos, los cuales son simplemente trasmitidos si existe un solo receptor, pero que han de ser reproducidos en las ramificaciones de las arborescencias. Si el coste de reproducción no es despreciable, esto puede modificar la solución, midiendo entonces el coste de utilización de una arborescencia por la suma de valoraciones de los arcos componentes, *más* un coste de reproducción en las ramificaciones. Los algoritmos precedentes pueden ser ligeramente modificados para la inclusión del coste adicional: sea ρ el coste de duplicación de un documento y supongamos $|R_h| = 2$. La primera estimación de $e(x, R_h)$ estaba basada en el supuesto de que x es una ramificación; por consiguiente, en lugar de calcular $e(xy_1) + e(xy_2)$ calcularemos $e(xy_1) + e(xy_2) + \rho$, salvo que $x \in R_h$. El resto del algoritmo no varía.

En algunos casos, sin embargo, el coste de duplicación no es proporcional al número de documentos reproducidos (por ejemplo, en multicopista). En tal caso surgen las dos soluciones extremas siguientes.

1. Se hace una reproducción del documento para cada uno de los elementos de R_h y cada copia es enviada por una *pista.* No resulta más útil buscar una arbores-

cencia, puesto que el tronco común será recorrido por $|R_h|$ copias del documento y el coste de utilización se incrementará consecuentemente.

2. No se reproduce el documento y el único ejemplar irá sucesivamente de un punto a otro de R_h, en un cierto orden, por ejemplo (xy_1y_2) o (xy_2y_1). El coste de la operación se mide obteniendo la suma de las desviaciones entre dos puntos consecutivos en el orden elegido. Si el coste se calcula así para cada orden, puede elegirse la solución más económica. Pero el número de órdenes posibles, $|R_h|!$, es enseguida enorme y, entonces, sería útil un algoritmo que proporcionara directamente la solución. Nótese que este problema está muy directamente relacionado con el de caminos hamiltonianos de un grafo (Berge, 1958, Cap. 11; Camion, 1960; Flament, 1959a; Harary y Ross, 1954; Kruskal, 1956; Roy, 1961).

(β) *Retransmisores.* Los posibles emisores y receptores necesarios de una información son definidos al mismo tiempo que la tarea; los retransmisores se definen a través de la búsqueda de la organización óptima. Los individuos que deben retransmitir una información pueden no ser conscientes de su exacta necesidad, pueden estar pobremente informados de su papel de "retransmisores" o pueden estar poco involucrados en la operación. Razones psicológicas de este tipo nos llevan a considerar un coste de retransmisión de información adicional al coste estudiado anteriormente.

Podemos volver a las técnicas de análisis establecidas en la sección precedente, considerando, no el grafo valorado N, sino una serie de grafos valorados N_h, uno por cada información a_h. Un grafo N_h es la reproducción del grafo N y de sus valoraciones, con el coste de retransmisión añadido del modo siguiente. Este coste puede dividirse en dos partes: el coste de la retransmisión - recepción y el coste de la retransmisión-emisión, correspondientes a los dos aspectos del papel de "retransmisor". La valoración inicial de todo arco (x, y) será incrementada con el coste de retransmisión - emisión, excepto si $x \in E_h$; y con el coste de la retransmisión-recepción, excepto si $y \in R_h$.

Observemos que si la red tiene una valoración constante, el problema no se plantea: el camino más corto siempre es el que cuenta con menos retransmisores.

(γ) *Saturación.* Algunos autores estiman que, siempre que un gran número de mensajes pasen por el mismo punto, puede producirse, sobre todo por razones psicológicas, una saturación de tal punto y una deterioración de la función del grupo (Gilchrist, Shaw y Walker, 1954; Shelly y Gilchrist, 1958).

Cuando existen varios caminos igualmente satisfactorios para cada información, podemos buscar aquellos que hacen intervenir a cada punto en la transmisión de sólo una información. Sin embargo, pueden darse casos en los que es interesante utilizar caminos que no son pistas con el fin de evitar la saturación.

Para precisar más la noción de saturación, será introducido un coste adicional, que varía en cada punto en función del número de mensajes que pasan por él. La valoración de la red N varía entonces con su utilización. No parece posible adaptar aquí los algoritmos estudiados, por la razón acabada de mencionar y porque estos algoritmos están relacionados con la transmisión de una sola información a la vez, mientras que la saturación depende de la transmisión de varias informaciones.

(δ) *Aspectos temporales.* Hasta ahora hemos pasado por alto los aspectos temporales del problema, los cuales intervienen a dos niveles.

En primer lugar, ciertos modos de comunicación requieren un tiempo considerable para emitir o recibir mensajes, en relación con el tiempo requerido para la transmisión (en especial, comunicación verbal) y, además, el mismo sujeto no puede emitir y recibir varios mensajes al mismo tiempo (por ejemplo, en general no es posible comunicarse telefónicamente con varias personas a la vez). En tal caso, puede ser esencial, para determinar la organización temporal, la elección del orden de emisiones y de los canales de comunicación. Por ejemplo, si x debe transmitir una información a y_1 directamente y, a través de z, a y_2 (figura 2.19), se dirigirá primero a z, de forma que éste pueda dirigirse a y_2 mientras x se dirige a y_1. En general, los caminos de transmisión serán elegidos de forma que se eviten *en todo momento* los efectos de saturación.

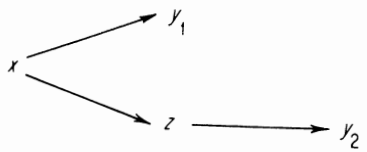


FIGURA 2.19

Por otra parte, el tiempo puede afectar la definición misma de la tarea, la cual puede incluir subtareas ordenadas temporalmente (cf. Roby, 1962); esto puede implicar restricciones importantes en la búsqueda de la organización óptima.

Roy (1961) ha estudiado problemas estrechamente relacionados por medio de la teoría de grafos; sus resultados deben ser adaptados a los aspectos especiales de nuestro problema.

(ϵ) *Riesgos de error en la transmisión.* No basta que una información llegue a su receptor; debe llegar hasta él sin que haya sido alterada por un error de transmisión.

Una información puede resultar alterada mientras pasa por un canal de la red como producto del "ruido" o, quizás con mayor frecuencia, en el punto de retransmisión a causa de los fallos humanos del retransmisor. Tropezamos de nuevo con restricciones ya descubiertas.

Sin embargo, el único modo de contar con garantía efectiva de que no se producirá ningún error de comunicación es la introducción de redundancia (cf. Miller, 1951, Cap. 12): repetir la misma información a través del mismo o diferentes caminos (para eliminar riesgos de error sistemático). Esto implica que las exigencias de exactitud son generalmente contrarias a las exigencias de economía.

El estudio matemático de estos problemas, que está por hacer, debe tener en cuenta la teoría de la información de Shannon (1948) y trabajos como los de Mason (1953, 1956) sobre los fenómenos de *feedback* en las redes, que hacen posible el control de la información.

Señalemos todavía otro aspecto del problema, que lo aproxima a las cuestiones de saturación: la llegada simultánea de varios mensajes al mismo punto aumenta considerablemante el riesgo de error en la recepción (Egan, Clarke y Carterette, 1956).

4.5. *Inclusiones y distancias entre redes; modelo de organización óptima.*

Tomemos un grupo de n miembros que ha de llevar a cabo una tarea T en una red N.

Generalmente N está valorada; cuando se omite esta valoración, se obtiene un grafo que denotaremos por N^*.

Ya ha sido definido el modelo de tarea T (Sec. 3.4) juntamente con los diversos tipos de grafos que lo representan: $M_h(T)$, grafo de comunicaciones (directas o indirectas) necesarias en relación con la información a_h; $M(T)$, multigrafo que reúne todos los grafos $M_h(T)$; y $M^*(T)$, grafo obtenido a partir de los precedentes sin distinguir la diversidad de informaciones. $M^*(T)$ será denotado por M^*.

Paralelamente, la organización óptima resultante de las relaciones entre N y $M(T)$ puede representarse por los grafos O_h en relación con la información a_h (son los grafos estudiados en la sección 4.3); O, multigrafo que reúne todos los O_h; O^*, obtenido a partir de O sin tener en cuenta la diversidad de informaciones.

Los tres grafos N^*, M^* y O^* pertenecen al conjunto de grafos de n puntos (cf. Cap. 1, Sec. 8); pueden definirse las relaciones existentes entre ellos en la laticia $\mathcal{L}(n)$. En especial se pueden estudiar las distancias entre estos grafos. Apelamos al teorema 1.4 (Cap. 1, Sec. 8.5):

Si G *y* $G' \in \mathcal{L}(n)$,

$$d[G, G'] = d[G, (G \cup G')] + d[(G \cup G'), G']$$
$$= d[G, (G \cap G')] + d[(G \cap G'), G'].$$

Consideremos $d[N^*, (N^* \cup M^*)]$; efectivamente esta distancia mide el número de arcos de M^* que no están en N^*: constituyen las comunicaciones necesarias que no pueden llevarse a cabo *directamente.*

Si $d[N^*, (N^* \cup M^*)] = 0$, entonces

$$N^* = N^* \cup M^* \text{ y entonces } M^* \subset N^*.$$

TEOREMA 2.6. *Si* N *es un grafo de valoración constante y si* $M^* \subset N^*$, *entonces* $O^* = M^*$.

Prueba. En virtud de lo que hemos visto (Sec. 4.3), los grafos O_h son pistas o arborescencias mínimas.

Bajo las condiciones del teorema, si (x, y) M^*, pertenece a N^* y el arco (x, y) es la única pista $\theta(xy)$.

Por otra parte, Berge (1958, Cap. 16, teorema 7) muestra que toda arborescencia es un árbol y, consecuentemente, que toda arborescencia de k puntos tiene $(k-1)$ arcos (cf. Sec. 4.3 (δ), propiedad A_2). Pero si $E_h = \{x\}$ y $R_h = \{y_1, y_2\}$, M_h pertenece a las arborescencias constituidas por los arcos (x, y_i) $y_i \in R_h$; si $M^* \subset N^*$, esta arborescencia existe en N^* y toda arborescencia mínima $\theta(x; R_h)$ tendrá la misma longitud; por consiguiente esta arborescencia será mínima.

Si $M^* \subset N^*$, el resultado $O^* = M^*$ generalmente es verdadero sólo si N tiene una valoración constante, aunque también es verdadero en muchos otros casos.

Consideremos ahora la distancia $d(O^*, N^*)$ cualquiera que sea O^*, igual o no a M^*. Mide el número de arcos de N^* que no pertenecen a O^*, es decir, el número de canales en la red que *no son útiles* para la ejecución de la tarea.

Estas nociones y medidas serán útiles para el análisis del comportamiento de los grupos que vamos a estudiar.

5. APLICACIONES

5.1. *Introducción.*

En las aplicaciones que van a ser presentadas aparecerá una disparidad entre la elaboración matemática y los problemas concretos: habrá demasiadas, o insuficientes, matemáticas.

En el estudio experimental de grupos de trabajo, utilizaremos las *nociones* de red, modelo y organización óptima; los casos serán tan simples que podremos eliminar la necesidad de elaboración matemática.

Por el contrario, en el estudio de grupos de discusión o de grupos reales grandes (por ejemplo, la organización de una empresa), las matemáticas que hemos desarrollado son claramente insuficientes debido a la complejidad de los problemas en tales casos.

Opinamos que, a pesar de todo, la formulación matemática proporciona una articulación entre los diferentes estudios; que el estudio experimental de grupos de trabajo como una función de redes de comunicación nació y se desarrolló bajo el impulso de la investigación matemática; que en el estudio de casos más complejos, nuestras elaboraciones se integrarán en un gran modelo matemático o constituirán una buena aproximación a ciertos aspectos esenciales del problema. En resumen, opinamos que nuestro trabajo no es completamente inútil (quizás su principal utilidad es la de incitar a otros investigadores a realizar análisis que los mejoren).

Cuando se estudia un grupo que tiene que comunicarse en una red dada, se pueden adoptar dos actitudes: (1) *Actitud descriptiva e interpretativa:* ¿Cuál es el comportamiento espontáneo del grupo?¿Cómo puede ser explicado en relación a un modelo matemático? Esto afecta a los estudios experimentales. (2) *Actitud normativa:* ¿Cómo debe comportarse el grupo para satisfacer ciertos criterios de economía? Este es el problema que se plantea en un grupo real como el de la administración de una empresa, caso que no estudiaremos aquí; los análisis teóricos precedentes dan una idea de la importancia y también de la complejidad del uso de la teoría de grafos en este campo.

5.2. *Estudio experimental de grupos de trabajo.*

Es éste el problema más estudiado en relación con redes de comunicación*.

(α) *Técnica experimental.* Se forman grupos de n miembros cada uno, siendo $n = 3, 4$ o 5; los resultados no parecen depender de n dentro de estos límites (Walker, *sin fecha*).

Cada individuo se coloca en una celdilla desde la que no puede ver ni hablar con los demás. El intercambio de mensajes escritos lo hacen posible unas aberturas en las paredes de las celdillas (ver figura 2.20). Abriendo o cerrando estas aberturas,

---

* Especialmente Bavelas (1950); Christie, Luce y Macy (1952); Flament (1956; 1958a); Gilchrist, Shaw y Walker (1954); Guetskow y Simon (1955); Heise y Miller (1951); Hirota (1953); Leavitt (1951); Macy, Christie y Luce (1953); Mulder (1959a; 1959b; 1960a; 1960b); Shaw (1954b; 1954c; 1956); Shaw y Rothschild (1956); Shelley y Gilchrist (1958).

puede el experimentador obtener la red de comunicación deseada. Casi siempre, estas redes son simétricas y fuertemente conexas; en unos cuantos estudios la comunicación se ha establecido por medio de teléfono (Heise y Miller, 1951).

La tarea propuesta a los sujetos es del siguiente tipo (Leavitt, 1951 y, después de él, la mayor parte de autores): se dispone un juego de $(n+1)$ símbolos; todos los sujetos reciben una lista de n símbolos, siendo diferente en cada lista el símbolo que falta. Por tanto, sólo uno de los símbolos figura en todas las listas; la tarea finaliza cuando todos los miembros del grupo conocen el símbolo común.

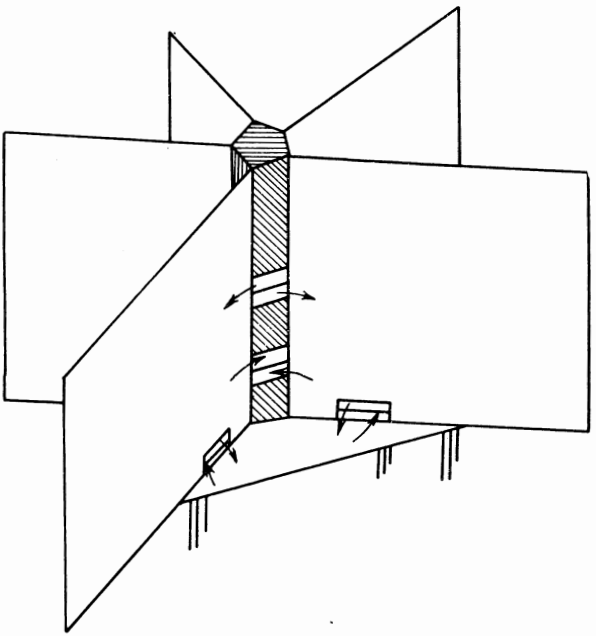


FIGURA 2.20

Ejemplo para $n=5$ (Flament, 1956, 1958a): se utilizan las seis vocales del alfabeto: las cinco listas pueden ser

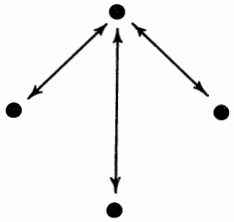
$$A\,E\,I\,O\,U-$$
$$A\,E\,I\,O-Y$$
$$A\,E\,I-U\,Y$$
$$A\,E-O\,U\,Y$$
$$A-I\,O\,U\,Y$$

A es la solución.

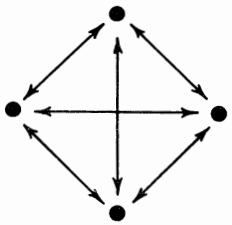
Cada grupo debe resolver sucesivamente varios problemas del mismo tipo.
Para cada problema el experimentador registra el número y naturaleza de las co-

municaciones emitidas por cada sujeto en dirección a cada uno de los demás y el tiempo requerido por el grupo para obtener la solución. Además, cuando se completa el experimento, los sujetos rellenan un cuestionario sobre organización del grupo, elección de líder y satisfacción del trabajo.

(β) *Elección de un modelo de tarea.* En la tarea descrita hemos distinguido n informaciones primarias, cada una de las cuales era inicialmente poseída por un sujeto y una información secundaria, la solución, obtenida por el reagrupamiento de las n informaciones primarias y que finalmente es poseída por todos los miembros del grupo.



Modelo centralizado



Modelo homogéneo

FIGURA 2.21

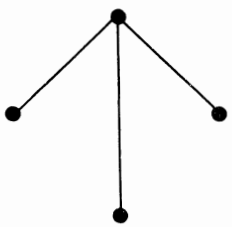
No se ha definido el punto de reagrupamiento, ni se ha especificado si debía ser único. Por consiguiente la tarea no admite un modelo único, sino varios, entre los cuales el grupo debe elegir: n modelos con un único punto de reagrupamiento; $n(n-1)/2$ modelos con dos puntos de reagrupamiento; ... ; un modelo con n puntos de reagrupamiento. En total, (2^n-1) modelos.

En este conjunto de modelos se distinguen dos tipos extremos:

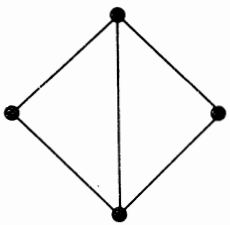
1. *Modelos centralizados:* un solo punto de reagrupamiento, llamado *centralizador;* hay n modelos distintos de este tipo.
2. *Modelo homogéneo:* cada miembro del grupo realiza por su cuenta el reagrupamiento; existe un solo modelo de este tipo.

Estos dos tipos de modelo están representados por su grafo M^* en la figura 2.21.

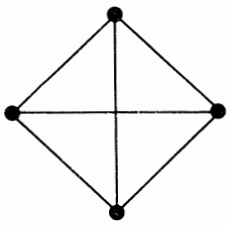
Los demás modelos son llamados *intermediarios.*



Red centralizada



Red diagonal

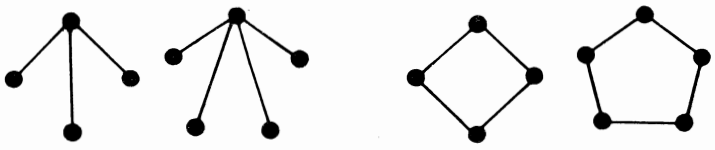


Red completa

FIGURA 2.22

Shaw y Rothschild (1956) estudiaron 24 grupos de cuatro miembros cada uno, ocho de los cuales trabajaron en cada una de las redes de la figura 2.22. Después de varios ensayos fue descubierto el modelo elegido eventualmente por cada grupo, a través del análisis de las comunicaciones y de los cuestionarios facilitados después del experimento. Los resultados aparecen en la tabla 2.22.

Mulder (1959b) estudió grupos de cuatro o cinco miembros en las redes de la figura 2.23. A partir de las comunicaciones intercambiadas, calculó un *índice de decisión centralizada,* que se aproximaba a cero cuando el modelo aplicado era homogéneo y a la unidad en el caso de un modelo centralizado. Los resultados figuran en la tabla 2.3.



Redes centralizadas *Redes circulares*

FIGURA 2.23

Para la comprensión de estos resultados, deben compararse los modelos de la figura 2.21 con las redes de las figuras 2.22 y 2.23. Intuitivamente se aprecia que, por regla general, los grupos tienden a *elegir el modelo más aproximado posible a la red* en la cual trabajan. Esto se manifiesta especialmente en el caso de modelos centralizados y homogéneos. Volviendo a la sección 4.5, encontramos en estos casos las interesantes relaciones:

$$N^* = M^* = O^*$$

TABLA 2.2. ELECCION DE UN MODELO EN FUNCION DE LA RED.

	Modelo centralizado	Modelo intermediario	Modelo homogéneo
Red centralizada	8	–	–
Red diagonal	1	5	2
Red completa	3	–	5

FUENTE: Shaw y Rothschild, 1956.

TABLA 2.3. INDICE MEDIO DE DECISION CENTRALIZADA.

	Red centralizada	Red circular
Cuatro sujetos	0.52	0.30
Cinco sujetos	0.62	0.11

FUENTE: Mulder, 1959b.

Después de los comentarios de Shaw y Rothschild, se hace patente que lo que hemos llamado modelo intermediario, se trata, en el caso de la red diagonal, de un modelo con dos reagrupamientos localizados en los puntos terminales de la diagonal.

Se puede intentar especificar las razones de la elección entre un modelo centralizado y un modelo homogéneo, examinando la organización óptima, la cual sería definida en cada red en virtud del modelo elegido. Nos atendremos a la distancia $d(O^*, N^*)$ y el coste relativo a O. Aquí las redes tienen una valoración constante y el coste puede medirse por el número de informaciones emitidas y remitidas. La tabla 2.4 muestra los valores resultantes de este análisis.

TABLA 2.4.

		Cuatro sujetos				Cinco sujetos	
		Red centralizada	Red diagonal	Red completa	Red circular	Red centralizada	Red circular
Modelo centralizado	Coste	6	6	6	7	8	10
	$d(0^*N^*)$	0	4	6	6	0	10
Modelo homogéneo	Coste	12	12	12	12	20	20
	$d(0^*N^*)$	0	0	0	0	0	0

Las preferencias constatadas en las tablas 2.2 y 2.3 entre modelos centralizados y homogéneos, pueden ser completamente explicadas a partir de los datos de la tabla 2.4 y de la siguiente regla:

Los grupos prefieren el modelo en que $d(0^*, N^*) =$ mínimo; en caso de igualdad se prefiere el modelo de mínimo coste.

En modo alguno quiere decir esto que los grupos llegan a una decisión después de un análisis consciente de las características matemáticas de las diversas posibilidades.

Pero los resultados del análisis global justifican el supuesto de los siguientes comportamientos espontáneos: al principio cada sujeto emite mensajes a través de todos los canales posibles; los reagrupamientos se efectúan en los puntos donde es posible la aportación espontánea de informaciones; y la primera etapa se repite con la información secundaria; después las cosas se normalizan, las comunicaciones inútiles desaparecen, los principios de economía recobran su importancia, pero dentro de la estructura de la primera fase.

Este análisis da buena cuenta de los fenómenos conocidos, aunque éstos son poco numerosos y poco diversificados (muy pocos tipos de redes han sido utilizados) para hacer posibles análisis más profundos.

(γ) *Organización óptima y organización efectiva.* Consideremos un grupo que ha de llevar a cabo un modelo de tarea (elegido por él mismo o impuesta por el experimentador) en una red dada de comunicación. En tal caso sabemos cómo determinar la organización óptima y, en particular, el coste mínimo de realización, medido

aquí en función del número de comunicaciones. De hecho, el grupo puede adoptar una *organización eficaz diferente* de la óptima. Discutiremos el coste efectivo.

Es evidente que en todos los casos *el coste efectivo no puede ser menor que el coste mínimo* - por definición. Por consiguiente es esencial valorar la *eficacia* de un grupo por medio de una comparación de los costes efectivo y mínimo. Sin embargo, la mayoría de los autores tratan sólo del coste efectivo, en virtud del cual establecen diferencias en la eficacia de los grupos.

En nuestros experimentos (Flament 1956, 1958a) y a través de la discusión de los resultados (Flament, 1958c) de Leavitt (1951) ha sido posible mostrar que la *razón* (*coste efectivo/coste mínimo*) se acerca a la unidad al final de los experimentos, si éstos no son demasiado largos, para todos los grupos y redes. En todas las redes examinadas la eficacia tiende igualmente hacia el máximo. Por tanto, la diferencia bruta de ejecución observada entre redes no corresponde en absoluto a ningún fenómeno psicosocial; es simplemente resultado de la imposibilidad estricta de hacerlo de otra forma, una vez dados la red y el modelo de tarea.

El fenómeno psicosocial real aparece a nivel de elección del modelo (cuando el modelo no está determinado por la definición de la tarea). Como hemos visto, un modelo costoso puede ser elegido si es el único que implica una organización tal que $0^* = N^*$.

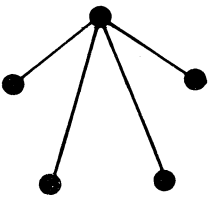
Por otra parte, los grupos llegan a ser igual de eficaces sólo después de un cierto tiempo de ejercicio en la red; previamente las cosas se producen diferentemente de una red a otra; esto es lo que ahora estudiaremos.

(δ) *Isomorfismo modelo - red.* Han sido puestos a trabajar grupos de cinco sujetos en redes completas y centralizadas y se les ha impuesto un modelo centralizado u homogéneo. (Fig. 2.24) conforme al plan que aparece en la tabla 2.5 (Flament, 1958a).

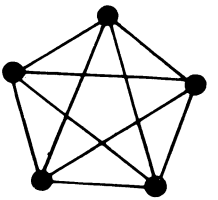
TABLA 2.5.

	Red centralizada	Red completa
Modelo centralizado	$d\,[N^*,(N^* \cup M^*)] = 0$ $d(O^*, N^*) = 0$	$d\,[N^*,(N^* \cup M^*)] = 0$ $d(O^*, N^*) = 12$
Modelo homogéneo	$d\,[N^*,(N^* \cup M^*)] = 12$ $d(O^*, N^*) = 0$	$d\,[N^*,(N^* \cup M^*)] = 0$ $d(O^*, N^*) = 0$

Apreciamos inmediatamente que existe un isomorfismo entre la red centralizada y el modelo centralizado y entre la red completa y el modelo homogéneo; es decir, $N^* = M^*$. En consecuencia y en virtud del teorema 2.6, aplicable en el presente caso, $O^* = \bar{M}^* = N^*$; esto es lo que dan a entender las distancias igual a cero en las correspondientes casillas de la tabla 2.5. En las otras dos casillas hay un *no - isomorfismo* entre la red y el modelo, aunque de diferente modo: en el caso "red completa, modelo centralizado" no falta ningún canal en la red con respecto al modelo (todas las comunicaciones son directas), pero hay 12 canales inútiles para la organización óptima en la red. Por el contrario, en el caso "red centralizada, modelo homogéneo"



*N** Centralizada
*M** Centralizada



*N** Completa
*M** Homogénea

FIGURA 2.24

faltan 12 canales y las correspondientes comunicaciones deben ser retransmitidas, pero la organización óptima utiliza todos los canales de la red. En el primer caso hay no - isomorfismo a causa de un *exceso de canales;* en el segundo, por una *falta de canales.*

Para que la descripción sea completa debemos también observar lo siguiente: (1) En el presente caso de no - isomorfismo por falta de canales, todas las comunicaciones indirectas deben ser retransmitidas a través del *mismo* punto: el punto central de la red centralizada, el cual es un punto de articulación para todos los pares de puntos del grafo, existiendo, por tanto, riesgo de *saturación.* (2) En el caso de modelo centralizado los grupos fueron informados de que el punto de reagrupamiento (*centralizador*) había de ser único aunque ellos tenían que elegir este punto. En una red centralizada su punto central se automanifiesta como centralizador y, de hecho, *todos* los grupos coincidieron en esta elección (los valores de la tabla 2.5 fueron calculados bajo esta hipótesis). En una red homogénea cualquier punto puede ser elegido y la red permanece totalmente automorfa.

La figura 2.25 muestra la evolución de la eficacia, medida por la razón coste efectivo/coste mínimo, para los problemas sucesivamente resueltos por los grupos. Las curvas son experimentales pero fueron ponderadas después del análisis estadístico. La tabla 2.6 completa los resultados ofreciendo el análisis del contenido de los mensajes durante el primer problema.

Inicialmente la eficacia es más débil en el modelo centralizado que en el modelo homogéneo: la razón es la necesidad de intercambiar mensajes relativos a la elección de un centralizador, como lo muestra la importancia relativa de las comunicaciones de organización (tabla 2.6). Sin embargo, para todo modelo, la *situación de isomorfía es la más eficiente.* La pérdida relativa de eficiencia en situaciones de no - isomorfía debe analizarse en función del tipo de no- isomorfía. En el caso de *no - isomorfía por exceso de canales* la ineficacia proviene del uso innecesario de canales inútiles, como lo muestra la importancia relativa de las comunicaciones redundantes (tabla 2.6) y la comparación de las rutas de comunicación en las dos situaciones del modelo centralizado (tabla 2.7). En el caso de *no - isomorfía por falta de canales* las dificultades se deben al mal funcionamiento de los retransmisores, a causa, sin duda, de la saturación, como lo muestra la importancia relativa de las demandas de in-

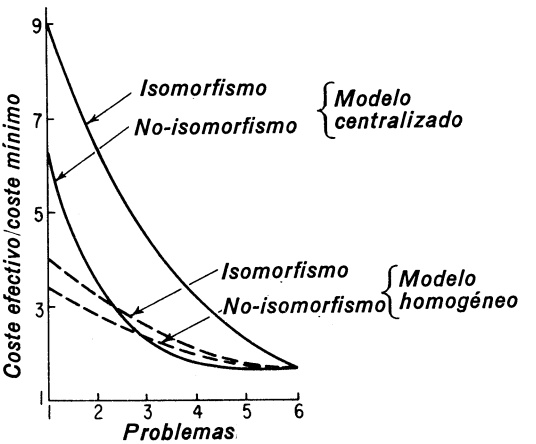


FIGURA 2.25

TABLA 2.6. ANALISIS DEL CONTENIDO DE LAS COMUNICACIONES DURANTE EL PRIMER PROBLEMA.

Modelo	*Centralizado*		*Homogéneo*	
Red	*Centralizada*	*Completa*	*Centralizada*	*Completa*
Comunicaciones necesarias y suficientes (= coste mínimo)	8	8	20	20
Comunicaciones redundantes	20	36	28	28
Demandas de información	5	7	13	8
Comunicaciones de organización	14	11	7	0
Comunicaciones diversas	6	7	6	11
Total (=coste efectivo)	53	69	74	67

formación (tabla 2.6). De hecho, esta dificultad se mantiene durante bastante tiempo y la importancia de las demandas de información en caso de no - isomorfía por falta de canales es la única característica de la tabla 2.6 que también aparece en tablas análogas, correspondientes a problemas sucesivos (no presentados aquí).

TABLA 2.7. RUTAS DE COMUNICACION EN UN MODELO CENTRALIZADO (PROMEDIO SOBRE TODOS LOS GRUPOS Y PROBLEMAS)

Comunicaciones	Red centralizada	Red completa
Centralizador ⟷ periféricos	20	18
Periféricos ⟷ periféricos	—	8

5.3. *Estudio Experimental de Grupos de Discusión.*

Shaw, Rothschild y Strickland (1957) y Flament (1961) han estudiado grupos de discusión de tres miembros en las redes centralizadas y completas de la figura 2.26.

Se presenta a los sujetos estímulos auditivos o visuales en cantidades variables. Los sujetos deben estimar el número de estímulos. En general no dan la misma estimación; deben conversar entre ellos para llegar a una estimación común.

Es evidente que el proceso de comunicación resultante de esta situación no puede ser descrito por medio de un modelo de tarea, en el sentido riguroso que hemos dado a esta noción. Sin embargo, es posible describir el proceso de comunicación en tales términos que la matematización es todavía insuficiente.

En la mayoría de los casos, dos de los tres sujetos hacen estimaciones iniciales muy próximas entre sí, mientras que el tercero da una estimación inicial muy diferente. Denotemos los dos primeros sujetos por A y B y el tercero por X; X es el *divergente.*

FIGURA 2.26

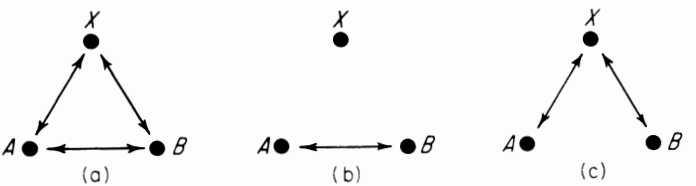


FIGURA 2.27

De acuerdo con las teorías de Festinger (1950) es posible describir el proceso de comunicación espontánea, es decir, de la comunicación que tiene lugar fuera de las restricciones materiales de una red en particular. Pueden distinguirse *tres fases:*

1. Intercambio general de información sobre las estimaciones iniciales de cada uno; esta fase está esquematizada en la figura 2.27 (a);
2. formación de una mayoría entre los sujetos A y B, cuyas opiniones son ligeramente diferentes (fig. 2.27 (b));
3. Influencia de la mayoría AB sobre el divergente X (fig. 2.27 (c)).

Por otra parte, es posible, a partir de una idea de Deutsch y Gerard (1955), distinguir *dos tipos* de comunicación influyentes en las opiniones ajenas.

1. Influencia *informatoria:* las opiniones ajenas ofrecen una información indirecta de la realidad y esta información se integra lógicamente en la opinión inicial del sujeto, la cual se modifica en consecuencia (Flament, 1959b).
2. Influencia *normativa:* el sujeto adopta la opinión ajena para no romper afectivamente con el otro.

Se puede admitir que:

(a) una *pequeña* diferencia de opinión se puede reducir tanto por influencia informatoria sólo, como por influencia normativa;

(b) si dos individuos llegan a un acuerdo por influencias normativas, adquirirán un *sentimiento de grupo* más fuerte que el que tendrían por la mera influencia informatoria;

(c) la influencia normativa ejercida por los miembros de un grupo sobre un individuo ajeno a él, será tanto más eficaz cuanto mayor sea el sentimiento de grupo;

(d) en una red de comunicación la influencia informatoria puede ser retransmitida, mientras que la influencia normativa de una comunicación desaparece cuando ésta es retransmitida.

Consideremos ahora los individuos A, B y X definidos anteriormente en las redes de la figura 2.26; la figura 2.28 muestra los tres posibles casos.

La situación (α) sirve de control.

En (β) y (γ) la fase de intercambio de información (fig. 2.27 (a)) es perturbada, pero, sin duda, de modo despreciable.

En (β) la formación de una mayoría AB no es estorbada y se producirá una influencia normativa. La influencia de la mayoría AB sobre el divergente X será impedida por la ausencia del canal BX, pero A podrá hablar en nombre de un grupo (AB), con un fuerte sentimiento de grupo, que tendrá fuerte influencia sobre X.

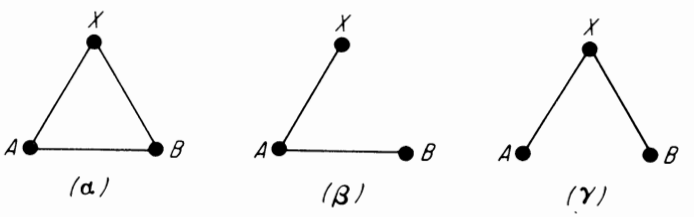


FIGURA 2.28

En (γ) la influencia normativa no intervendrá en la formación de la mayoría AB, pero si las diferencias de opinión entre A y B son pequeñas, la influencia informatoria retrasmitida por X será eficaz. La influencia de A y B sobre X puede tener lugar sin dificultad, pero por parte de un grupo débil y sin eficacia.

A través de este análisis es posible establecer que la diferencia inicial de opinión puede reducirse:

(a) entre A y B, aproximadamente igual en (α), (β) y (γ);

(b) entre X y A o B, aproximadamente igual en (α) y (β), pero menor en (γ).

Los resultados experimentales de la tabla 2.8 confirman enteramente estas predicciones.

TABLA 2.8. REDUCCION DE LA DIVERGENCIA INICIAL.

	Entre X y A	Entre X y B	Entre A y B
(α)	1.41	1.41	0.35
(β)	1.46	1.44	0.28
(γ)	1.21	1.21	0.29

FUENTE: Flament, 1961.

Evidentemente, estos análisis podrían ser generalizados y matematizados; sin embargo, nos parece que esto no es por ahora deseable puesto que nuestro conocimiento de los procesos de influencia social no están suficientemente establecidos.

Es conveniente ahora repasar la teoría de French (1956), de la que Harary (1959c) ha desarrollado algunos aspectos matemáticos. French supone relaciones medibles de *poder* entre los miembros de un grupo de parejas. El conjunto es representable por un grafo valorado y orientado. Si los procesos de influencia se dan en una red de comunicación, supone French que el poder de x sobre y será efectivo sólo si existe en la red el canal (xy). Nos parece que en este caso se elimina la posibilidad de retransmitir influencia informatoria. Este aspecto del fenómeno se puede tomar fácilmente en cuenta considerando que el poder de x sobre y se da en función inversa de la desviación $e(xy)$. Las fórmulas serían del mismo tipo matemático que las utilizadas por Harary (1959a) para el estudio del status sociométrico.

III. PROCESOS DE EQUILIBRAMIENTO

1. EL PROBLEMA.

Sea A un hombre, H una chistera y C una corbata. A este hombre le encanta llevar chistera y le horroriza ponerse corbata; pero él sabe que la chistera se lleva con corbata: ¡su situación es muy desagradable!

Se puede decir que entre A y H existe una *relación positiva,* entre A y C *negativa* y de nuevo *positiva* entre H y C. Representando las relaciones positivas por líneas completas y las negativas por líneas quebradas, obtenemos la figura 3.1 (a).

Para salir de esta situación desagradable, A tiene varias alternativas: puede aceptar llevar una corbata y entonces se vuelve positiva la relación negativa AC [Fig. 3.1 (b)]; puede también renunciar a llevar chistera y entonces AH se convierte en negativa; o puede convencerse de que la chistera puede ponerse sin corbata: HC resulta negativa [Fig. 3.1 (c)].

Sea ahora A de nuevo un hombre y B su mujer. A A le desagrada llevar corbata pero a su mujer B le gusta que él la lleve. Finalmente supongamos que marido y mujer desean complacerse mutuamente. Esta situación es formalmente idéntica a la precedente; reemplazando H por B, queda representada en la figura 3.1 (a).

Por último consideremos tres individuos A, B y C, entre los cuales existen relaciones *amistosas* u *hostiles.* De acuerdo con la sabiduría popular, "los amigos de mis amigos son mis amigos", lo cual está representado en la figura 3.2 (a); y también, "los amigos de mis enemigos son mis enemigos" [Fig. 3.2 (b)]. La sabiduría popular dice, a veces, "los enemigos de mis enemigos son mis amigos", que corresponde de nuevo a la figura 3.2 (b); pero también se dice "divide y vencerás" [Fig. 3.2 (c)]. Esta última situación no es muy satisfactoria porque los enemigos dominados suelen responder "la unión hace la fuerza".

Este rápido examen de unos cuantos casos, sin pretensión sistemática, sugiere que si existen relaciones positivas o negativas entre una persona y dos objetos, o en-

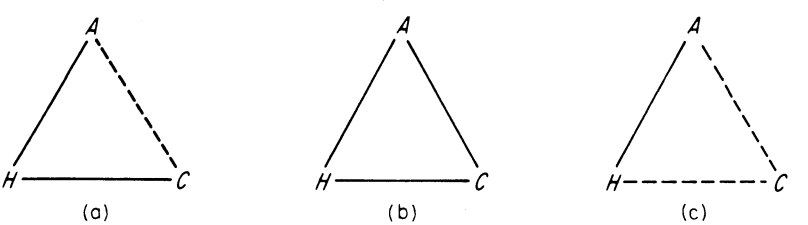


FIGURA 3.1

tre dos personas y un objeto, o entre tres personas, esto es suficiente para definir ciertas situaciones que son desagradables y otras que no lo son.

La formulación sistemática del problema proviene de Heider (1946) y, su matematización, de Cartwright y Harary (1956).

Evidentemente, en las figuras 3.1 y 3.2 el problema ha sido traducido a términos de *grafos algebraicos* (Cap. 1, Sec. 9). Tales grafos deben, pues, mostrar lo que caracteriza a las situaciones satisfactorias y no satisfactorias. Podemos generalizar a grafos de n puntos, a partir de los grafos de tres puntos.

La psicología de las anteriores situaciones exige que, si la situación no es satisfactoria, evolucione hacia la que lo es. Por consiguiente hablaremos de *grafos equilibrados y desequilibrados.* Apostel (1957) ha propuesto una teoría general del equilibrio de un grafo, que indudablemente es demasiado general para que nos resulte de gran utilidad.

Cuando hayamos aprendido a distinguir los grafos equilibrados de los desequilibrados, intentaremos determinar, para aquéllos, un *grado de equilibrio* que nos permita clasificarlos.

Finalmente trataremos de establecer qué *procesos de equilibramiento* permiten pasar de un grafo desequilibrado a otro equilibrado.

Veremos que la teoría de grafos permite al menos abordar este problema de dinámica de grupos. Se piensa a menudo que los métodos del álgebra moderna y, en especial, de la teoría de grafos sólo pueden ser útiles para la *descripción estática de estructuras.* Mostraremos que no es así.

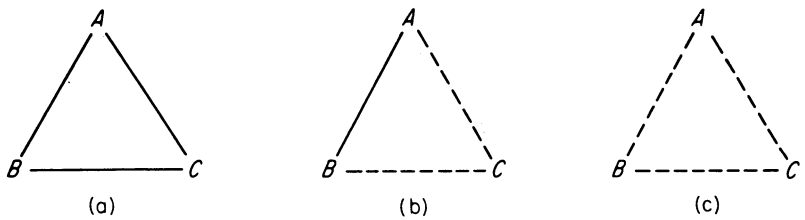


FIGURA 3.2

2. DEFINICION DEL EQUILIBRIO DE UN GRAFO.

(D_1) *Un grafo algebraico completo* es un grafo simétrico, tal que entre dos puntos cualesquiera existe una *arista positiva o negativa.*

Si X es el conjunto de n puntos del grafo, P es el conjunto de aristas positivas y N es el conjunto de aristas negativas, un grafo algebraico completo está representado por $G=(X;P,N)$ con $P \cap N=\emptyset$ (una arista no puede ser positiva y negativa a la vez) y $P \cup N=$ {conjunto de pares de puntos distintos}.

Los grafos de las figuras 3.3 y 3.4 son grafos algebraicos, pero sólo el de la figura 3.3 es completo. Tenemos que

$$P= \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,d),(b,e),(c,e),(d,f),(e,f)\},$$
$$N= \{(a,d),(a,f),(b,c),(b,f),(c,d),(c,f),(d,e)\}.$$

que constituyen los $n(n-1)/2=15$ pares de puntos distintos.

En un grafo algebraico las cadenas y ciclos se definen con independencia del signo de sus aristas componentes.

(D_2) *El signo de una cadena o de un ciclo* es el producto de los signos de las aristas componentes, estando definido el producto por la siguiente tabla de multiplicación:

	+	−
+	+	−
−	−	+

Es la regla de signos del álgebra clásica.

Utilizamos $s\,(x\ y)$ como signo de la arista (x, y) y $s\,(\gamma\,(xy))$ como signo de la cadena $\gamma\,(xy)$.

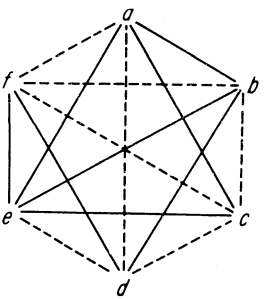


FIGURA 3.3

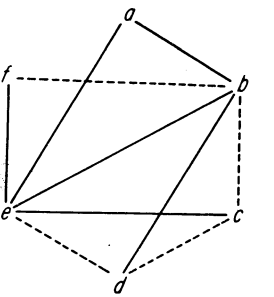


FIGURA 3.4

Así, en la figura 3.3, la definición D_2 da, por ejemplo,

$$s\,(\gamma\,(abed)) = s\,(a\ b) \times s\,(b\ \ e) \times s\,(e\ \ d) = (+) \times (+) \times (-) = (-).$$

(D_3) Un ciclo de longitud 3, o *triángulo*, está equilibrado si y sólo si su signo es *positivo.*

Puede verificarse fácilmente que esta definición cubre exactamente las situaciones agradables bosquejadas al principio del capítulo. Relacionando las definiciones D_2 y D_3 se ve prácticamente que un triángulo está equilibrado si y sólo si tiene dos, o ninguna, aristas negativas; si no está equilibrado, tiene una o las tres aristas negativas.

(D_4) *Un grafo algebraico completo está equilibrado si y sólo si todos sus triángulos están equilibrados.*

Harary (1953a) propone otra definición:

(D_5) *Un grafo algebraico completo está equilibrado si y sólo si todos sus ciclos son positivos.*

Es evidente que D_5 implica D_4, puesto que un triángulo equilibrado es un ciclo positivo. Mostraremos más tarde (Teorema 3.2) que efectivamente estas dos definiciones son equivalentes. La definición D_4 tiene la ventaja de estar más cerca

de la intuición que tenemos de situaciones concretas, como las que analizamos al principio del capítulo. La definición D_5 de Harary tiene a su vez la ventaja de ser más fácilmente aplicable al estudio del equilibrio de grafos incompletos (como los de la figura 3.4).

Otros tipos de equilibrio. Harary (1955) propone dos nociones restrictivas del equilibrio de un grafo: *equilibrio local* y *equilibrio de orden m.*

Un grafo está equilibrado localmente en el punto x si y sólo si todos los ciclos que pasan por x son positivos. Si un grafo está localmente equilibrado en todos los puntos $x \in X$, está equilibrado en el sentido de D_5.

Un grafo está m-equilibrado si todos su ciclos de longitud menor o igual a m son positivos. Si un grafo algebraico completo es 3-equilibrado, lo es en el sentido de D_4.

También podemos considerar el equilibrio de grafos algebraicos que son no simétricos, incompletos o valorados.

Si el grafo es incompleto es más fácil definir el equilibrio por D_5, porque bien puede ocurrir que no contenga ningún triángulo. O bien se considera el grafo como completo, pero con tres tipos de aristas, positiva, negativa y nula, admitiendo que un triángulo que al menos tiene una arista nula es siempre equilibrado.

Si el grafo es no simétrico, hablaremos de circuito en lugar de ciclo y utilizaremos las mismas definiciones.

Se puede pensar que un grafo algebraico valorado es necesario para representar la realidad psicosocial, teniendo en cuenta el grado de intensidad de las relaciones interindividuales. Pero de hecho parece difícilmente posible definir el equilibrio del grafo, no por razones matemáticas, sino por razones psicológicas. Si la relación AB es $+3$ y la relación BC es -4, ¿qué valor debería tener la relación AC para que el triángulo estuviera equilibrado? Carecemos de hipótesis psicológicas, o más bien éstas son numerosas y están poco justificadas. La reflexión, la observación o la experimentación deben en primer lugar proponer una definición concerniente a los hechos y después las matemáticas se ocuparán de ello.

En cualquier caso, sólo consideramos aquí grafos algebraicos completos, en el sentido de D_1, definiendo el equilibrio por medio de D_4.

Los trabajos de Harary (1953, 1955) y los de Abelson y Rosenberg (1958) muestran que los resultados obtenidos acerca del equilibrio de grafos algebraicos completos pueden aplicarse fácilmente a otros casos y que este rodeo es con frecuencia más útil que el estudio directo.

3. CARACTERISTICAS DE GRAFOS EQUILIBRADOS.

Un grafo puede ser identificado como equilibrado o desequilibrado por medio de la definición D_4. No obstante, la tarea corre el riesgo de resultar tediosa y es deseable establecer diversas propiedades de los grafos equilibrados, que permitan identificarlos con mayor facilidad y pongan de manifiesto ciertos aspectos profundos de la definición.

TEOREMA 3.1. $G = (X; P, N)$ *es un grafo algebraico, completo y equilibrado*

si y sólo si existe una bipartición de X *en* X_1 *y* X_2 *(uno de estos subconjuntos puede ser vacío) tal que*

$$P \subset X_2^2 \cup X_1^2 \quad \text{y} \quad N \subset X_1 \cdot X_2.$$

En otras palabras: X está dividido en dos clases, X_1 y X_2, siendo positivas todas las aristas *intra*-clases y negativas todas las aristas *inter*-clases.

Prueba de condición necesaria. Sea $a \in X$ un punto cualquiera pero fijo. Consideremos dos puntos x e $y \in Pa$ (Fig. 3.5). Establecemos que $(x, y) \in P$, porque de lo contrario el triángulo (axy) sería negativo y sólo $s\,(x\ y)$ podría serlo. Consideremos dos puntos x' e $y' \in Na$. Establecemos que $(x', y') \in P$, o de lo contrario el triángulo $(ax'y')$ sería negativo, dado que sus tres aristas serían negativas. Por último, establecemos que $(y, y') \in N$, porque, si no, (ayy') sería negativo, puesto que (a, y) es positivo y (a, y') negativo.

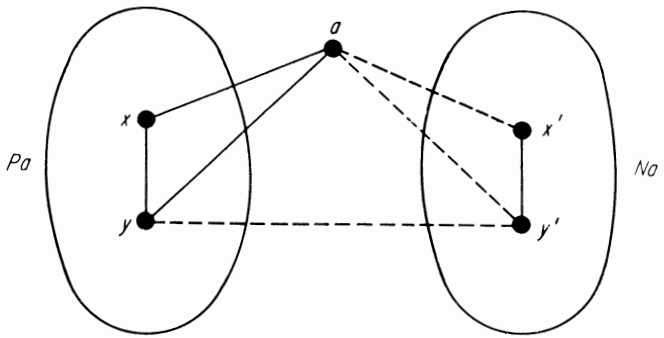


FIGURA 3.5

Así en el conjunto $X_1 = Pa \cup \{a\}$, todas las aristas son positivas; también en el conjunto $X_2 = Na$; y todas las aristas son negativas entre X_1 y X_2.

La división X_1, X_2 constituye una bipartición de X; efectivamente, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, puesto que $Pa \cap Na = \emptyset$ y $a \notin Na$, ya que una arista no puede ser positiva y negativa al mismo tiempo; y $X_1 \cup X_2 = X$, puesto que, siendo G completo, todo punto de X pertenece a Pa o a Na o es el mismo punto a.

Observemos, finalmente, que esta bipartición no depende en absoluto del punto a elegido para la demostración; en efecto, dado un punto $b \neq a$, si $b \in Pa$, tenemos que

$$Pb \cup \{b\} = Pa \cup \{a\} = X_1,$$

y

$$Nb = Na = X_2;$$

si $b \in Na$,

$$Pb \cup \{b\} = Na = X_2,$$

y

$$Nb = Pa \cup \{a\} = X_1.$$

Prueba de condición suficiente. Sea X_1 y X_2 una bipartición de X que satisface la condición. Dado un triángulo (abc), si sus tres puntos pertenecen a X_1 o los tres pertenecen a X_2, las tres aristas son positivas; si, por ejemplo, $a \in X_1$ y

b y $c \in X_2$, las aristas (a, b) y (a, c) son negativas y la arista (b, c) es positiva; en ambos casos el triángulo es equilibrado.

TEOREMA 3.2. *Las definiciones D_4 y D_5 son equivalentes.*

Prueba. $D_5 \Rightarrow D_4$, puesto que, si todos los ciclos son positivos (por D_5), los triángulos en particular son positivos y (por D_3) equilibrados; por consiguiente, D_4.

$D_4 \Rightarrow D_5$. En efecto, si D_4 es satisfecha por un grafo, por el teorema 3.1 X_1 y X_2 constituyen una partición de X. Dado un ciclo de longitud arbitraria, si todos sus puntos pertenecen a X_1 o pertenecen a X_2, todas sus aristas son positivas; si tal ciclo tiene algunos de sus puntos en X_1 y otros en X_2, cada vez que pasamos de X_1 a X_2 tenemos una arista negativa y otra arista negativa retornando de X_2 a X_1. Por tanto, el número de aristas negativas del ciclo es par; en ambos casos el ciclo es positivo y se satjsface la definición D_5 (Fig. 3.6).

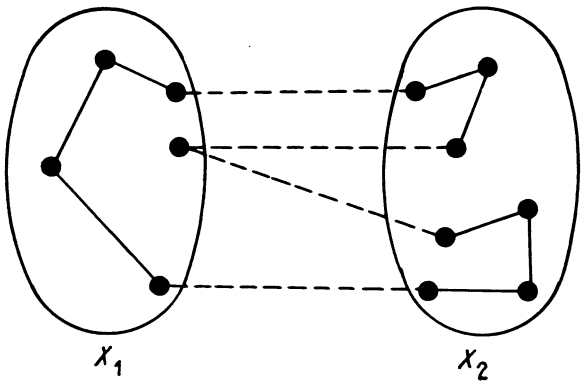


FIGURA 3.6

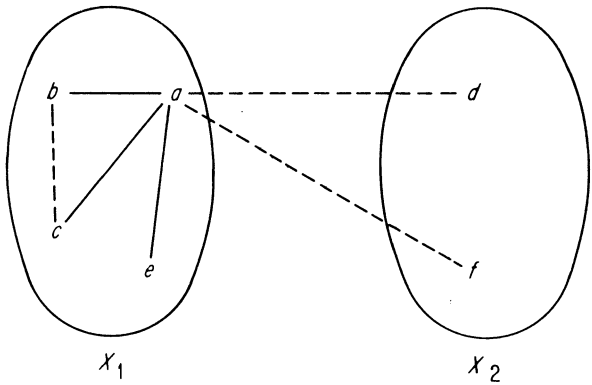


FIGURA 3.7

El teorema 3.1 ofrece, por su demostración, un medio práctico para juzgar el equilibrio de un grafo: elegimos un punto cualquiera a y hacemos $X_1 = Pa \cup \{a\}$

y $X_2 = Na$, lo cual es rápido; y verificamos fácilmente si estos conjuntos tienen las propiedades definidas por el teorema. Así, puede verse inmediatamente que el grafo de la figura 3.3 no es equilibrado, puesto que b y $c \in Pa$ y $(b, c) \in N$ (Fig. 3.7).

Pero el verdadero interés del teorema radica en la afirmación de que toda situación social, que tiene algo más que dos "bloques" antagónicos, es una situación desequilibrada (recordamos que uno de los bloques puede ser vacío: situación de concierto universal, la cual es equilibrada).

Volveremos sobre este punto en el último párrafo de este capítulo.

El interés del teorema 3.2 es más técnico: muestra que en los grafos algebraicos *completos* las propiedades de equilibrio sólo pueden definirse hasta el nivel simple del triángulo, sin necesidad de considerar ciclos de longitud cualquiera. Esta observación nos conducirá a resultados desconocidos para ciertos autores que siempre toman en consideración todos los ciclos.

TEOREMA 3.3. *El producto de los signos de los cuatro triángulos construidos sobre cuatro puntos es siempre positivo.*

Prueba. Sean a, b, c y d cuatro puntos; los cuatro triángulos construidos sobre estos puntos son $(abc), (abd), (acd)$ y (bcd). Establecemos que

$$S = s\,(abc) \times s\,(abd) \times s\,(acd) \times s\,(bcd).$$

En virtud de D_2 tenemos

$$S = [s\,(ab) \times s\,(ac) \times s\,(bc)] \times [s\,(ab) \times s\,(ad) \times s\,(bd)] \times$$
$$\times [s\,(ac) \times s\,(ad) \times s\,(cd)] \times [s\,(bc) \times s\,(bd) \times s\,(cd)];$$

Puesto que el producto de signos es asociativo y conmutativo:

$$S = [s\,(ab) \times s\,(ab)] \times [s\,(ac) \times s\,(ac)] \times [s\,(ad) \times s\,(ad)]$$
$$\times [s\,(bc) \times s\,(bc)] \times [s\,(bd) \times s\,(bd)] \times [s\,(cd) \times s\,(cd)].$$

Por tanto, cualquiera que sea el signo de cada arista, cada corchete es positivo y S es siempre positivo.

(D_6) La *base de equilibrio con eje a* de un grafo algebraico G consiste en la lista de los signos de los triángulos que contienen a.

Un grafo de n puntos tiene n bases de equilibrio, cada una de las cuales tiene un punto diferente por eje. En el siguiente ejemplo aparecen las bases de equilibrio con ejes a y d del grafo de la figura 3.3.

$$a: \begin{cases} s\,(abc) = (-);\ s\,(abd) = (-);\ s\,(abe) = (+);\ s\,(abf) = (+); \\ s\,(acd) = (+);\ s\,(ace) = (+);\ s\,(acf) = (+); \\ s\,(ade) = (+);\ s\,(adf) = (+);\ s\,(aef) = (-); \end{cases}$$

$$d: \begin{cases} s\,(dab) = (-);\ s\,(dac) = (+);\ s\,(dae) = (+);\ s\,(daf) = (+); \\ s\,(dbc) = (+);\ s\,(dbe) = (-);\ s\,(dbf) = (-); \\ s\,(dce) = (+);\ s\,(dcf) = (+);\ s\,(def) = (-). \end{cases}$$

Obsérvese que la base de eje a contiene tres triángulos negativos, mientras que la base de eje d contiene cuatro.

TEOREMA 3.4. *Si se conoce la base de equilibrio de un grafo algebraico completo G, se deducen de ella los signos de todos los triángulos de G.*

Prueba. Dada una base con eje a, ¿cuál es el signo del triángulo (bed) que no viene dado por la base? Consideremos los cuatro triángulos construidos sobre los cuatro puntos a, b, c y d. Sea

$$S' = s\,(abc) \times s\,(abd) \times s\,(acd);$$

S' es conocido a partir de la base de eje a. Defínase S como en el teorema 3.3; tenemos entonces

$$S = S' \times s\,(bcd);$$

Puesto que, por el teorema 3.3, S es siempre positivo, como consecuencia:

$$s\,(bcd) = S'$$

Los teoremas 3.3 y 3.4 introducen de hecho lo que puede llamarse noción de *grados de libertad,* en el estudio del equilibrio de un grafo. Ocupémonos de los cuatro puntos a, b, c, d (teorema 3.3).

Supongamos que se desea construir un grafo, sobre estos cuatro puntos, por elección libre del signo del mayor número posible de triángulos. El teorema 3.3 establece que sólo puede elegirse libremente el signo de tres triángulos. Observemos además que esta elección del signo de los triángulos es independiente, hasta cierto punto, del signo de las aristas. Sobre cuatro puntos, tres triángulos cualesquiera siempre tienen un punto en común; si se desea elegir $s\,(abc)$, $s\,(abd)$ y $s\,(acd)$, deben considerarse las aristas (a, b), (a, c) y (a, d), las cuales pueden tener cualquier signo; como en la figura 3.8, por ejemplo. Se determina que $s\,(abc) = (+)$, $s\,(abd) = (+)$ y $s\,(acd) = (-)$; para obtener este resultado, se asignan los signos apropiados a las aristas (b, c), (b, d) y (c, d) (Fig. 3.8); pero al hacerlo, el signo del triángulo (bed) queda determinado.

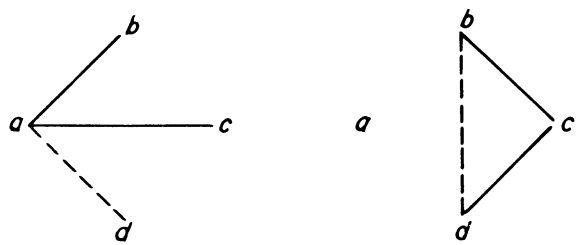


FIGURA 3.8

La noción de base de equilibrio y el teorema 3.4 generalizan este argumento para un n cualquiera. Sea $X' = X - \{a\}$, siendo a el eje de la base considerada; entonces $|X'| = (n-1)$. Todas las aristas que no contienen a se definen a partir de X'; el número de las mismas es $(n-1)(n-2)/2$; todos los triángulos de la base están constituidos por dos puntos de X' y por a; y toda arista que no contiene a a, pero

está conectada con a, define un triángulo de la base. Hay pues $(n-1)(n-2)/2$ triángulos en la base de un grafo de n puntos; este número mide los grados de libertad del grafo.

TEOREMA 3.5. *Un grafo algebraico completo es equilibrado si y sólo si todos los triángulos de una base son positivos.*

Prueba. Si todos los triángulos de una base son positivos, todos los triángulos del grafo lo son también y, por definición, el grafo es equilibrado. Efectivamente, para todo triángulo (bed) que no figura en la base de eje a (cf. demostración del teorema 3.4):

$$s\,(bcd) = s\,(abc) \times s\,(abd) \times s\,(acd) = (+)$$

Por otra parte, si el grafo es equilibrado, todos estos triángulos son positivos (por definición) y, en particular, los de la base.

TEOREMA 3.6. *Todos los triángulos de un grafo algebraico completo son desequilibrados si y sólo si todos los triángulos de la base son negativos.*

Prueba. La prueba es paralela a la del teorema precedente, transformándose la ecuación correspondiente en:

$$s\,(bcd) = s\,(abc) \times s\,(abd) \times s\,(acd) = (-).$$

TEOREMA 3.7. *El número de grafos algebraicos, completos y equilibrados, de n puntos, es $2^{(n-1)}$.*

Prueba. Se obtiene directamente del teorema 3.5 y de las consideraciones hechas acerca de los teoremas 3.3 y 3.4. En un grupo de n puntos hay $(n-1)$ aristas que contienen a, cada una de las cuales tiene dos posibilidades: positiva o negativa, lo que supone, en total, $2^{(n-1)}$ posibilidades. A partir de cada una de estas posibilidades puede contruirse una base de eje a, cuyos triángulos son todos positivos.

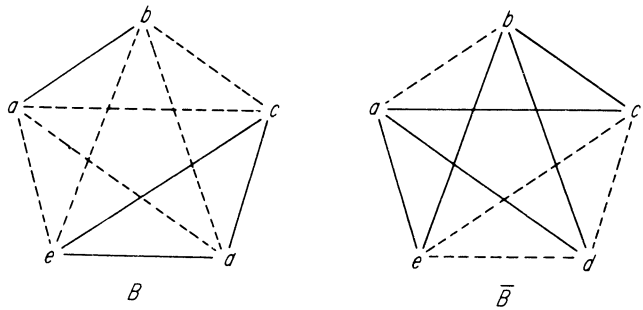


FIGURA 3.9

Se sigue del teorema 3.5 que todos los grafos algebraicos, completos y equilibrados, de n puntos, tienen bases idénticas.

El teorema 3.6 introduce un tipo especial de grafo desequilibrado: el grafo cuyos triángulos son todos negativos. Sea B un grafo equilibrado y $\bar{B}$ un grafo cuyos

triángulos son todos negativos, que será denominado grafo *anti-equilibrado.* Para un n dado, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\{b\}$ de los $2^{(n-1)}$ grafos equilibrados y el conjunto $\{\bar{B}\}$ de los grafos anti-equilibrados. En primer lugar, observemos que el teorema 3.7 puede ser trasladado a los grafos anti-equilibrados mostrando que

$$|\{\bar{B}\}| = |\{B\}| = 2^{(n-1)}$$

Si un triángulo es positivo y se invierte el signo de cada arista, el triángulo se vuelnegativo. En efecto, un triángulo positivo tiene una o tres aristas positivas; invirtiendo el signo de las aristas, se obtiene un triángulo con una o tres aristas negativas.

Por tanto, si $B = (X; P, N)$ es un grafo equilibrado, el grafo $\bar{B} = (X; \bar{P}, \bar{N})$ que se obtiene cambiando el signo de todas las aristas de B, es un grafo anti-equilibrado. Tenemos $\bar{P} = N$ y $\bar{N} = P$. Los grafos B y $\bar{B}$, de la figura 3.9, se construyen según este principio.

4. GRADO DE DESEQUILIBRIO DE UN GRAFO

Hemos estudiado los grafos equilibrados y hemos dicho unas cuantas cosas sobre grafos anti-equilibrados. Pero, ¿qué se puede decir de un grafo algebraico completo cualquiera? Las situaciones psicosociales representadas por dos grafos cualesquiera nunca son igualmente desagradables para los que las viven: los grafos deben ser clasificados conforme a un *grado de desequilibrio.*

Cartwright y Harary (1956) proponen una definición que también se aplica a grafos incompletos:

Si $c(G)$ es el número de ciclos de G, $c_+(G)$ es el número de ciclos positivos de G, y $b(G)$ es el grado de equilibrio, entonces

$$b(G) = \frac{c_+(G)}{c(G)}$$

Este índice varía de cero a la unidad; es un índice de equilibrio. El índice de desequilibrio sería $1 - b(G)$.

Tal índice puede ser criticado por dar el mismo peso a todos los ciclos, cualquiera que sea su longitud. Podría imaginarse una ponderación inversa a la longitud del ciclo; por ejemplo, si m es la longitud del ciclo, definir una función *decreciente* $f(m)$ y establecer

$c_+^{(m)}(G)$ = número de ciclos positivos de G, de longitud m,

$c^{(m)}(G)$ = número de ciclos de G, de longitud m,

y $$b(G) = \sum_m f(m) \frac{c_+^{(m)}(G)}{c^{(m)}(G)}.$$

Si nos atenemos a los triángulos $(m = 3)$, podemos establecer

$$f(m) = \begin{cases} 1 \text{ si } m = 3 \\ 0 \text{ si } m > 3 \end{cases}$$

de donde $$b(G) = \frac{c_{+}^{(3)}(G)}{c^{(3)}(G)}$$

Consideremos, no obstante, los grafos G_1 y G_2 de la figura 3.10. El primero tiene, de los diez, seis triángulos negativos,

$$(abc), (ade), (bcd), (bce), (bde) \text{ y } (cde),$$

mientras que el segundo sólo tiene cuatro:

$$(abc), (abd), (bce) \text{ y } (bde);$$

por consiguiente $b(G_1) < b(G_2)$, en caso de utilizar la última definición de $b(G)$.

Sin embargo, basta con cambiar el signo de las dos aristas de G_1: (b, c) y (d, e); e igualmente de las dos aristas de G_2: (b, c) y (b, d), para equilibrar el grafo B de la figura 3.10.

Esto nos lleva a definir el grado de desequilibrio de un grafo:

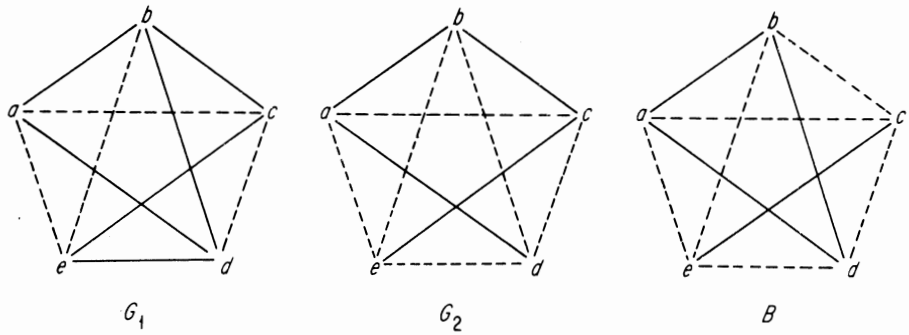


FIGURA 3.10

(D_7) *El grado de desequilibrio* $\delta(G)$ de un grafo algebraico G se mide por la potencia del conjunto menor de aristas de G, cuyo cambio de signo produce un grafo equilibrado.

Esta es la definición dada por Abelson y Rosenberg (1958). Este tipo de definición es frecuente en la teoría de grafos: Luce (1953) lo utiliza para el grado de conexidad de un grafo; nosotros lo hemos utilizado para el grado de intransitividad de un grafo (Flament, 1958d).

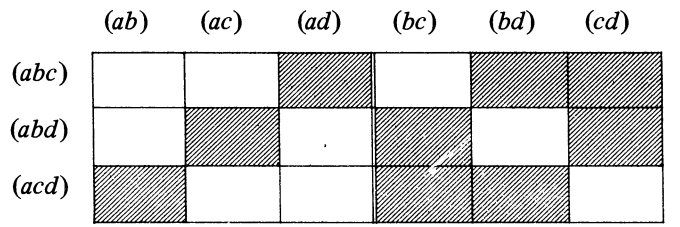
Abelson y Rosenberg (1958) proporcionan un método para hallar el grado de desequilibrio de un grafo G, que en esencia se reduce estrictamente a lo siguiente: si G tiene n puntos, se confecciona la lista de los $2^{(n-1)}$ grafos equilibrados de $\{B\}$ y se compara G a cada elemento de $\{B\}$; en cada comparación se registra el número de aristas que no tienen el mismo signo en G y en B; el grado de desequilibrio es el menor número registrado.

A partir de la noción de base de equilibrio de un grafo G, queremos proponer un método que:

1. da el grado de desequilibrio $\delta(G)$
2. da todos los conjuntos de aristas de G, de potencia $\delta(G)$, tales que el cam-

bio de signo de todas las aristas de uno de los conjuntos conduce a un grafo equilibrado.

Establezcamos una aplicación entre el conjunto de los $(n-1)(n-2)/2$ triángulos de la base de equilibrio, con eje a, de G y el conjunto V de los $n(n-1)/2$ aristas de G; en la tabla del conjunto cartesiano de estos dos conjuntos sombrearemos las casillas correspondientes a una arista y a un triángulo, si y sólo si las aristas *no* pertenecen al triángulo:



Distinguiremos en V dos partes: Va, conjunto de aristas que contienen el eje a, y $\overline{Va}$, conjunto de aristas que no contienen a. Una tabla tal presenta regularidades notables:

1. en cada fila hay tres casillas en blanco, puesto que un triángulo tiene tres aristas.
2. En cada columna de Va hay $(n-2)$ casillas en blanco, puesto que cada arista que contiene a (por ejemplo, (a, b)) forma un triángulo de la base con cada uno de los demás puntos de $X - \{a, b\}$, que son en total $(n-2)$.
3. En cada columna $\overline{Va}$ hay una casilla en blanco, puesto que una arista que no contiene a forma con a un triángulo de la base.
4. Para dos columnas cualesquiera de Va, existe una y sólo una fila, en la que las casillas correspondientes a las dos columnas están en blanco; y esta fila no tiene ninguna otra casilla en blanco en Va, puesto que dos aristas que contienen a –por ejemplo, (a, b) y (a, c)– determinan un sólo triángulo de la base: (abc).

En todas las casillas en blanco de una fila ponemos un (+) si el triángulo correspondiente es positivo, o un (–) si es negativo. La tabla así construida se denomina *estructura de la base de equilibrio, de eje a, de G.*

Así, el grafo de la figura 3.11 tiene por estructura de base de eje a la tabla que aparece en la página siguiente:

(Por simplificar la tabla no se ha puesto el rayado, que deja de ser útil cuando las casillas no rayadas están marcadas con + o –).

Si cambiamos el signo de una arista, el signo de los triángulos de la base que contienen esta arista, cambia también. Por ejemplo, en la estructura anterior, si cambiamos el signo de (a, b), tendremos que poner (+) en las filas (abd) y (abe). Por medio de una serie de operaciones de este tipo es posible hacer positivos todos los signos; entonces, el grafo obtenido es equilibrado.

	(*ab*)	(*ac*)	(*ad*)	(*ae*)	(*bc*)	(*bd*)	(*be*)	(*cd*)	(*ce*)	(*de*)
(*abc*)	−	−			−					
(*abd*)	+		+			+				
(*abe*)	+			+			+			
(*acd*)		−	−					−		
(*ace*)		−		−					−	
(*ade*)			−	−						−

(D_8) Llamamos *conjunto de equilibramiento de* G a todo conjunto de aristas de G que producen un grafo equilibrado cuando se les cambia de signo.

A todo grafo G de n puntos podemos asociar $2^{(n-1)}$ conjuntos de equilibramiento distintos, cada uno de los cuales da uno de los $2^{(n-1)}$ grafos equilibrados; si designamos estos conjuntos por $\mathcal{E}_i(G)$, $i = 1, 2, ..., 2^{(n-1)}$, puede reformularse la definición D_7 de grado de desequilibrio.

$$(D_7') \qquad \delta(G) = \min_i \{|\mathcal{E}_i(G)|\}.$$

Se denomina conjunto de equilibramiento *mínimo* de G al conjunto de equilibramiento de G, cuya potencia es el grado de desequilibrio $\delta(G)$.

El teorema 3.8 permite la construcción de conjuntos de equilibramiento, no necesariamente mínimos, de G, a partir de la estructura de la base de G.

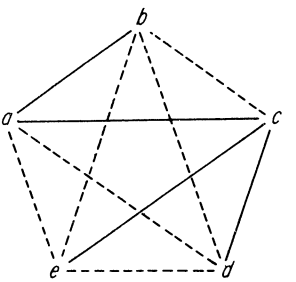


FIGURA 3.11

TEOREMA 3.8. *Dados: la estructura de la base de eje* a *del grafo* G*; el subconjunto* $V'a$ *del conjunto* Va *de aristas que contienen* a*; el subconjunto* $X'a$ *de los puntos de* X *que constituyen con* a *las aristas de* $V'a$.

$$X'a = \{x \mid x \in X,\ (a, x) \in V'a\},$$

construimos un conjunto $\overline{V}'a$ *de aristas que no contienen* a*, estableciendo* $(x, y) \in \overline{V}'a$ *si*

$$s(axy) = (+) \quad \text{y} \quad x \in X'a,\ y \notin X'a$$

o si $s(axy) = (-)$ y x e $y \in X'a$ o x e $y \notin X'a$.

$\Sigma = (V'a \cup \overline{V}'a)$ *es un conjunto de equilibramiento de* G.

Prueba. Supongamos que $s(axy) = (+)$. Si $x \in X'a$ e $y \notin X'a$, entonces $(a, x) \in V'a$ y $(a, y) \notin V'a$; en tal caso, $(x, y) \in V'a$. Por consiguiente, cambiando el signo de las aristas de Σ, sólo dos de las aristas de (axy) cambian: (a, x) y (x, y), mientras que el signo de (axy) no varía; permanece positivo.

Supongamos que $s(axy) = (-)$. Si x e $y \in X'a$, cambiarán de signo y el triángulo se volverá positivo; si x e $y \notin X'a$, sólo cambiará el signo de la arista (x, y), volviéndose positivo el triángulo.

Este teorema indica, hasta cierto punto, que nos hemos de ocupar sólo de los cambios de signo de las aristas que contienen a.

Ejemplo. Para obtener un grafo equilibrado a partir del grafo de la figura 3.11, resolvemos cambiar, entre las aristas que contienen a, sólo (a, b) y (b, c):

$$V'a = \{(a, b), (a, c)\} \text{ y } X'a = \{b, c\}.$$

Consideremos sucesivamente las aristas que no contienen a:

(b,c): $s(abc) = (-)$ y b y $c \in X'a$; por consiguiente $(b,c) \in \overline{V}'a$;
(b,d): $s(abd) = (+)$ y $b \in X'a$, $d \notin X'a$; por consiguiente $(b,d) \in \overline{V}'a$;
(b,e): $s(abe) = (+)$ y $b \in X'a$, $e \notin X'a$; por consiguiente $(b,e) \in \overline{V}'a$;
(c,d): $s(acd) = (-)$ y $c \in X'a$, $d \notin X'a$; por consiguiente $(c,d) \notin \overline{V}'a$;
(c,e): $s(ace) = (-)$ y $c \in X'a$, $e \notin X'a$; por consiguiente $(c,e) \notin \overline{V}'a$;
(d,e): $s(ade) = (-)$ y d y $e \notin X'a$; por consiguiente $(d,e) \in \overline{V}'a$.

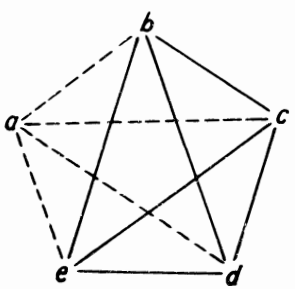


FIGURA 3.12

Por tanto:

$\overline{V}'a = \{(b, c), (b, d), (b, e), (d, e)$

y $\Sigma = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (b, e), (d, e)\}$;

Cambiando el signo de estas aristas en el grafo de la figura 3.11, se obtiene el grafo equilibrado de la figura 3.12.

Definamos, para todo x, $y \in X$, siendo x e y distintos del eje a:

$\delta(x)$ = número de triángulos negativos que contiene la arista (a, x);

$$\delta(xy) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(axy) = (+), \\ 1 & \text{si } s(axy) = (-). \end{cases}$$

TEOREMA 3.9. *Si la base de eje* a *de* G *comprende triángulos negativos* K_a, *y dado un conjunto* $V'a$, *entonces*

$$|\Sigma| = K_a + |X'a|(n - |X'a|) - 2 \sum_{x \in X'a} \delta(x) + 4 \sum_{x, y \in X'a} \delta(xy)$$

Prueba. Cambiando $(a, x) \in V'a$, se cambia el signo de los $(n-2)$ triángulos a los que pertenece (a, x); por consiguiente, cambiando todas las aristas de $V'a$, se produce un número de cambios de signo de triángulos igual a $|X'a|(n-2)$; pero si (a, x) y $(a, y) \in V'a$, el triángulo (axy) ha experimentado *dos* cambios de signo y, al final, $s(axy)$ permanece igual. Hay $|X'a|(|X'a|-1)/2$ triángulos que tienen dos cambios de signo que se anulan; los demás cambios de signo modifican el signo del triángulo; por tanto tenemos m triángulos modificados:

$$\begin{aligned} m &= [|X'a|(n-2)] - [|X'a|(|X'a|-1)] \\ &= |X'a|(n - |X'a| - 1). \end{aligned}$$

Estos m cambios pueden ir de negativo a positivo o al contrario.

El número de cambios que van de negativo a positivo es:

$$h = \sum_{x \in X'a} \delta(x) - 2 \sum_{x, y \in X'a} \delta(xy);$$

en efecto, cambiando $(a, x) \in V'a$, los $\delta(x)$ triángulos negativos se vuelven positivos; y cambiando $(a,y) \in V'a$, los $\delta(y)$ triángulos negativos se convierten en positivos; pero si $s(axy) = (-)$, este signo permanece negativo cuando se cambian al mismo tiempo (a,x) y (a,y). Cambiando (a,x) y (a,y) hacemos, por tanto, positivos los $(\delta(x) + \delta(y) - 2\delta(xy))$ triángulos negativos, puesto que $\delta(xy) = 1$ si y sólo si $s(axy) = (-)$ y puesto que se cuenta dos veces el triángulo (axy) en $(\delta(x) + \delta(y))$; generalizando, se encuentra el valor anunciado de h.

Puesto que m triángulos han modificado sus signos y puesto que h triángulos han pasado de negativos a positivos, hay $k = m - h$ triángulos que han pasado de positivos a negativos.

Y puesto que teníamos K_a triángulos negativos, ahora tenemos $K'a$ triángulos negativos:

$$K'a = K_a - h + k = K_a - 2h + m.$$

Si el triángulo $(ax'y')$ está entre los K'_a triángulos negativos, sólo puede convertirse en positivo cambiando (x', y'), porque todas las aristas que contienen a, que queremos cambiar, ya han sido cambiadas. Por consiguiente, habrá K'_a cambios de aristas que no contienen a. Como ya hay $|X'a|$ cambios de aristas que contienen a, el número total de cambios será:

$$|\mathcal{E}| = |X'a| + K'_a = |X'a| + K_a - 2h + m;$$

de aquí el teorema, sustituyendo h y m por sus valores.

De este teorema se deriva un algoritmo que permite hallar de una vez todos los conjuntos de equilibramiento mínimos de un grafo, que da el grado de desequilibrio del grafo. Basta calcular el valor de $|\mathcal{E}|$ para todos los conjuntos $V'a$ posibles, procediendo con los conjuntos más pequeños:

Ejemplo. Dado el grafo de la figura 3.13, cuya estructura de base, de eje a, es la siguiente:

	(*ab*)	(*ac*)	(*ad*)	(*ae*)	(*bc*)	(*bd*)	(*be*)	(*cd*)	(*ce*)	(*de*)
(*abc*)	−	−			−					
(*abd*)	+		+			+				
(*abe*)	+			+			+			
(*acd*)		−	−					−		
(*ace*)		+		+					+	
(*ade*)			−	−						−

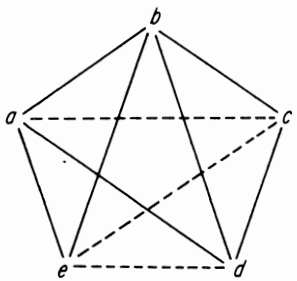


FIGURA 3.13

Tenemos:

$\delta(b) = 1$; $\delta(c) = 2$; $\delta(d) = 2$; $\delta(e) = 1$;

y

$\delta(bc) = 1$; $\delta(bd) = 0$; $\delta(be) = 0$;

$\delta(cd) = 1$; $\delta(ce) = 0$; $\delta(de) = 1$.

K_a es igual a 3: Sea $|V'a| = 0$; en tal caso $|\mathfrak{E}| = K_a = 3$. Sea $|V'a| = 1$; hay $(n-1) = 4$ posibilidades.

$V'a =$ $\{(a, b)\}$ o $\{(a, c)\}$ o $\{(a, d)\}$ o $\{(ae)\}$

En todos los casos tenemos:

$$K_a + |X'a|\,(n - |X'a|) = 7;$$

para $V'a = \{(ab)\}$, $-2\,\delta(b) = -2$ y, puesto que $\delta(xy)$ no necesita ser considerado, obtenemos:

$$|\mathfrak{E}| = 5;$$

etc. Se puede presentar la investigación en una tabla como la de la página siguiente.

Es ocioso considerar conjuntos de mayor potencia; efectivamente puesto que $V'a \subset \mathfrak{E}$, entonces $|\mathfrak{E}| \geqslant |V'a|$; si se considera el conjunto $|V'a| > 3$, tendríamos que $|\mathfrak{E}| > 3$; pero tenemos ya conjuntos con $|\mathfrak{E}| = 3$. Por consiguiente,

$$\delta(G) = 3.$$

Los conjuntos $V'a$ que entrañan $|\mathfrak{E}| = 3$ son

$$\emptyset;\ \{(a, c)\};\ \{(a, d)\};\ \{(a, b), (a, d)\};\ \{(a, c), (a, e)\};$$

los correspondientes conjuntos son, por el teorema 3.8,

$$\{(b, c), (c, d), (d, e)\};\ \{(a, c), (c, e), (d, e)\};\ \{(a, d), (b, e), (b, d)\};$$

$$\{(a, b), (a, d), (b, e)\};\ \{(a, c), (a, e), (b, e)\}.$$

$\lvert V'a\rvert$ $=\lvert X'a\rvert$	$\lvert X'a\rvert\,(n-\lvert X'a\rvert)$ $+\ Ka$	$V'a$	$-2\sum_{x\,\epsilon\,X'a}\delta(x)$ $+4\sum_{x,\,y\,\epsilon\,X'a}\delta(xy)$	$\lvert\ \mathcal{E}\ \rvert$
0	3	$\emptyset$	0	$\underline{3}$
1	7	(ab)	-2	5
		(ac)	-4	$\underline{3}$
		(ad)	-4	$\overline{3}$
		(ae)	-2	$\overline{5}$
2	9	$(ab),(ac)$	-2	7
		$(ab),(ad)$	-6	$\underline{3}$
		$(ab),(ae)$	-4	$\overline{5}$
		$(ac),(ad)$	-4	5
		$(ac),(ae)$	-6	$\underline{3}$
		$(ad),(ae)$	-2	$\overline{7}$
3	9	$(ab),(ac),(ad)$	-2	7
		$(ab),(ac),(ae)$	-4	5
		$(ab),(ad),(ae)$	-4	5
		$(ac),(ad),(ae)$	-2	7

Cada uno de estos conjuntos designa las aristas que basta cambiar de signo para que el grafo quede equilibrado. Son los únicos conjuntos de potencia 3 que dan este resultado (evidentemente encontramos los mismos conjuntos partiendo de una base de eje cualquiera).

La figura 3.14 ofrece, como ejemplo, los grafos obtenidos a partir de la figura 3.13, cambiando

$$\{(b,c),(c,e),(d,e)\}\ \text{o}\quad \{(a,c),(a,e),(b,e\}\ .$$

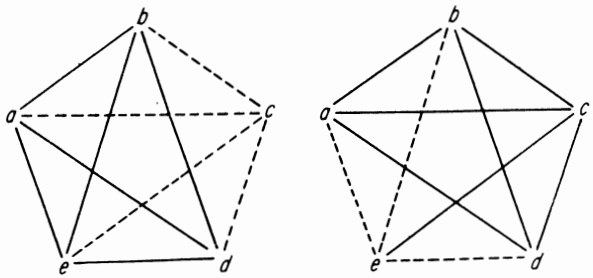


FIGURA 3.14

TEOREMA 3.10. *Si* $\overline{B}$ *es un grafo algebraico completo anti-equilibrado (siendo negativos todos sus triángulos), entonces,*

$$\delta(\overline{B}) = \frac{n(n-2) + \epsilon}{4}$$

donde $\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

y para todo $a \in X$, *todo conjunto* $V'a$ *de potencia*

$$|V'a| = \frac{(n-2) \pm \epsilon}{2}$$

conduce a un conjunto mínimo de equilibramiento.

Prueba. Si todos los triángulos de $\overline{B}$ son negativos, se tiene, cualquiera que sea el eje a de la base y el conjunto X_a, que

$$K_a = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\sum_{x \in X'a} \delta(x) = |X'a|(n-2)$$

$$\sum_{x,y \in Xá} \delta(xy) = \frac{|X'a|(|X'a|-1)}{2}$$

puesto que para todo x y todo y

$$\delta(x) = \delta(y) = (n-2) \quad \text{y} \quad \delta(xy) = 1.$$

Reemplazando estos valores en la fórmula del teorema 3.9, obtenemos:

$$|\mathfrak{E}| = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + |X'a|(n - |X'a|) - 2|X'a|(n-2) + 2|X'a|(|X'a|-1)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + |X'a|(|X'a| - n + 2).$$

Minimicemos esta expresión relativa a $|X'a|$: derivada de

$$|\mathfrak{E}| = 2|X'a|_{\min} - (n-2) = 0$$

de donde

$$|X'a|_{\min} = \frac{(n-2)}{2}$$

debiendo ser $|X'a|$ un número entero, interviene la corrección ϵ, y tenemos

$$|X'a|_{\min} = \frac{(n-2) \pm \epsilon}{2}$$

Sustituyendo este valor en la expresión de $|\mathfrak{E}|$ hallamos

$$|\mathfrak{E}|_{\min} = \delta(\overline{B}) = \frac{n(n-2) + \epsilon}{4}$$

Podemos pensar que los grafos anti-equilibrados son los grafos más desequilibrados de todos; propongamos en tanto la siguiente conjetura:

Conjetura. Si G es un grafo algebraico completo de n puntos, su grado de desequilibrio es

$$\delta(G) \leqq \frac{n(n-2)+\epsilon}{4}, \qquad \epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Abelson y Rosenberg (1958) dieron como teorema esta conjetura; desgraciadamente no dieron su demostración; y a nosotros nos ha sido imposible hasta ahora encontrarla.

La intuición sugiere el siguiente razonamiento:

Sea $\overline{B}$ un grafo anti-equilibrado y $\mathfrak{E}(B)$ un conjunto mínimo de equilibramiento de $\overline{B}$. Construimos una serie de grafos menos y menos equilibrados, mediante cambio de signo de las aristas de $\mathfrak{E}(\overline{B})$ en un orden dado; considerando todos los $\overline{B}$ posibles y, para cada uno de ellos, todos los posibles $\mathfrak{E}(\overline{B})$ en todos los órdenes posibles, debemos construir todos los grafos posibles. Este razonamiento es falso; efectivamente, si fuera verdadero, implicaría que existe para todo G un conjunto mínimo $\mathfrak{E}(G)$, incluido en uno de los conjuntos mínimos $\mathfrak{E}(\overline{B})$; pero el grafo de la figura 3.13 es un contraejemplo.

Construimos, por el teorema 3.10, los conjuntos mínimos de equilibramiento para un grafo $\overline{B}$ de $n = 5$ puntos; hallamos

$$|V'a| = \frac{(n-2) \pm \epsilon}{2} = 1 \text{ o } 2;$$

de aquí, los conjuntos $V'a$:

$$\{(a,b)\};\ \{(a,c)\};\ \{(a,d)\};\ \{(a,e)\};$$
$$\{(a,b),(a,c)\};\ \{(a,b),(a,d)\};\ \{(a,b),(a,e)\};$$
$$\{(a,c),(a,d)\};\ \{(a,c),(a,e)\};\ \{(a,d),(a,e)\};$$

y, por el teorema 3.8, los conjuntos $\mathfrak{E}(\overline{B})$:

$$\{(a,b),(c,d),(c,e),(d,e)\};\ \{(a,c),(b,d),(b,e),(d,e)\};$$
$$\{(a,d),(b,c),(b,e),(c,e)\};\ \{(a,e),(b,c),(b,d),(c,d)\};$$
$$\{(a,b),(a,c),(b,c),(d,e)\};\ \{(a,b),(a,d),(b,d),(c,e)\};$$
$$\{(a,b),(a,e),(b,e),(c,d)\};\ \{(a,c),(a,d),(b,e),(c,d)\};$$
$$\{(a,c),(a,e).(b,d),(a,e)\};\ \{(a,d),(a,e),(b,c),(d,e)\}.$$

Comparando esta lista con la establecida en relación con el grafo de la figura 3.13, se observa que no hay relación de inclusión; con este ejemplo perdemos la esperanza de probar la conjetura mediante el razonamiento sugerido, pero observamos que no invalida la conjetura.

5. PROCESOS DE EQUILIBRAMIENTO.

Las nociones mismas de equilibrio y desequilibrio implican que se va del desequilibrio al equilibrio. Un grupo cuya estructura es representada por un grafo algebraico desequilibrado, modificará su estructura hasta que se encuentre equilibra-

do. Pero, ¿cuál es el proceso? . ¿Y conforme a qué leyes? Estableceremos una primera hipótesis.

(H_1) El equilibramiento de un grafo algebraico se produce mediante una serie de operaciones, cada una de las cuales comporta el cambio de signo de una y sólo una arista.

Esta hipótesis no implica que el grupo decida el cambio de una arista y, después, examinando la nueva situación, comience de nuevo. Nuestra idea es que el estado de desequilibrio del grupo crea tensiones en toda la estructura, que exigen el cambio de diversas aristas, y que es muy probable que, por azar, una arista ceda antes que otras; entonces se crea una nueva situación, se manifiestan nuevas tensiones y el proceso comienza de nuevo.

Esta hipótesis implica que el proceso de equilibramiento se hace mediante una ruta en la laticia $\mathcal{L}_n^{\sigma}$ de los grafos simétricos de n puntos. Esta laticia, que ya hemos definido para grafos no algebraicos (cf. Cap. 1, Sec. 8.4), puede utilizarse para grafos algebraicos completos. En efecto, en un grafo algebraico completo todas las aristas posibles, de número $n(n-1)/2$, están presentes, aunque distribuidas en dos clases: conjunto P de aristas positivas y conjunto N de aristas negativas. Conociendo n, conocemos el conjunto V de todas las aristas, es decir, $V=(P \cup N)$; y el gra-

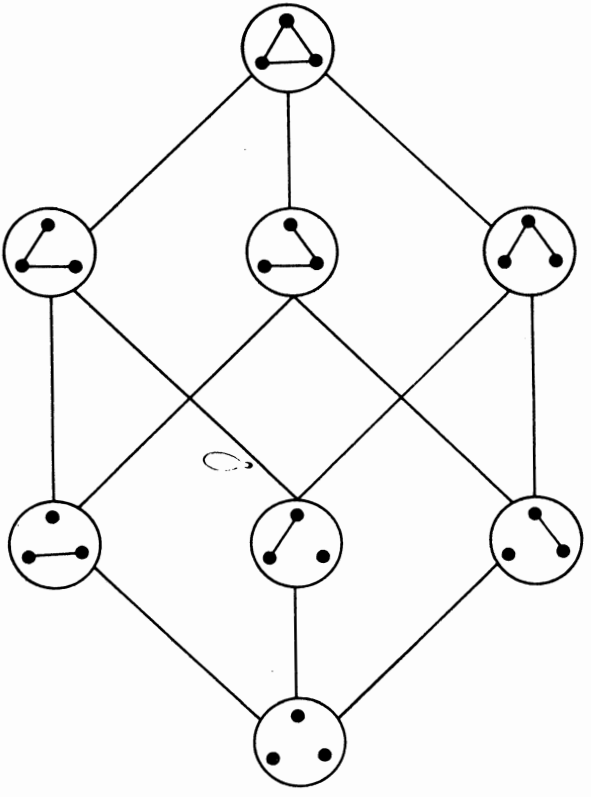


FIGURA 3.15

fo queda completamente definido sólo si P es conocido. N se deduce de él por complementariedad: $N = V - P$. Si una arista no está en el listado P de las positivas, que se da, quiere decir que está en el listado N, no dado, de las aristas negativas. Por consiguiente, a cada grafo no orientado ordinario $G^* = (X\,;P)$ se puede hacer corresponder un único grafo algebraico completo: $G = (X; P, N = V - P)$ e inversamente.

Si $n = 3$ y $X = \{a, b, c\}$, entonces $V = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ y todos los grafos usuales que pueden ser constuidos sobre X son los siguientes:

$$G^* = (X\,;P)$$

con P: $\emptyset$; $\{(a, b)\}$; $\{(a, c)\}$; $\{(b, c)\}$;

$\{(a, b), (a, c)\}$; $\{(a, b), (b, c)\}$; $\{(a, c), (b, c)\}$;

$\{(a, b), (a, c), (b, c)\}$.

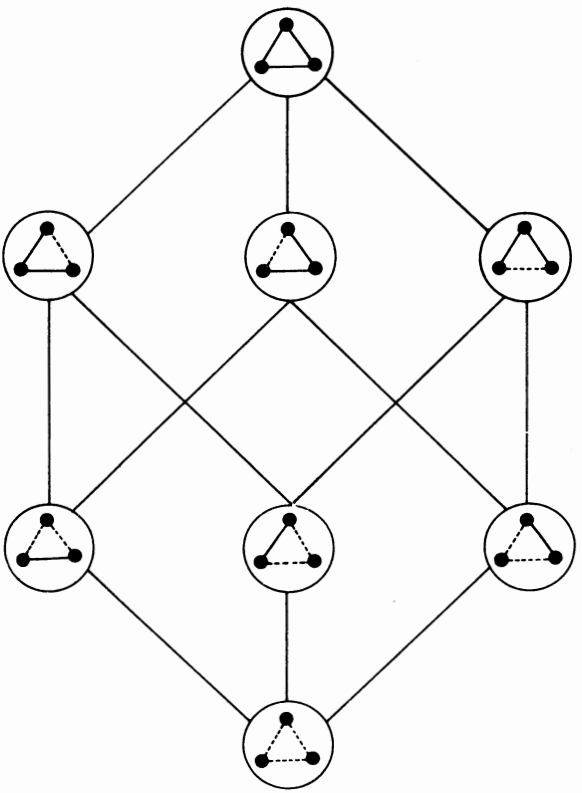


FIGURA 3.16

La laticia $\mathcal{L}_n^{\sigma}$ de estos ocho grafos posibles está representada en la figura 3.15.

La laticia de la figura 3.16 se obtiene haciendo corresponder a cada $G^* = (X; P)$ el grafo algebraico completo $G = (X\,;\, P\,,\, N = V - P)$. Esta última laticia es la que puede ser utilizada para describir el proceso de equilibramiento como una ruta de un grafo a otro.

TEOREMA 3.11. *Si G es un grafo algebraico completo de n puntos, el grado $\delta\,(G)$ de desequilibrio es la longitud del más corto de los caminos que van de G a los grafos equilibrados, en $\mathcal{L}_n^{\sigma}$.*

Prueba. Este teorema es de hecho una reformulación bastante evidente de la definición de $\delta\,(G)$ (D_7 o D'_7). En la laticia de los grafos ordinarios, dos grafos $G^*_i = (X\,;\, P_i)$ y $G^*_j = (X\,;\, P_j)$ están unidos por una línea si y sólo si la diferencia simétrica $(P_i \oplus P_j)$ tiene un solo elemento (cf. Teorema 1.5), es decir, si pasa de uno a otro añadiendo o sustrayendo una y sólo una arista. Si pasamos de G_i^* y G_j^* a los correspondientes grafos algebraicos G_i y G_j, añadir una arista es lo mismo que hacer positiva una arista negativa; y sustraer una arista es lo mismo que hacer negativa una arista positiva (cf. Fig. 3.16). Por tanto, la longitud de un camino en $\mathcal{L}_n^{\sigma}$, entre dos grafos algebraicos completos, corresponde al número de aristas que es necesario cambiar para pasar de un grafo a otro.

Diremos que dos grafos son *adyacentes* (en $\mathcal{L}_n^{\sigma}$) si y sólo si difieren en el signo de una y sólo una arista, es decir, si y sólo si una *cubre* la otra.

La Hipótesis H_1 es equivalente a decir que un grafo se transforma en un grafo adyacente. Pero un grafo de n puntos tiene $n\,(n-1)/2$ grafos adyacentes, puesto que tiene $n\,(n-1)/2$ aristas que pueden cambiarse de signo. ¿Cuáles son los grafos adyacentes en los que es transformable el grafo?

Podemos imaginar que el grupo del grafo G se pone como meta un estado de equilibrio preciso de grafo B y que elegirá, entre los adyacentes de G, los grafos que aparecen sobre las pistas $\theta\,(GB)$ de $\mathcal{L}_n^{\sigma}$; pero esto implica que, de un modo u otro, el grupo tiene en cada instante un conocimiento de $\mathcal{L}_n^{\sigma}$, lo cual es difícilmente admisible. Debe adoptarse una hipótesis que sólo comprenda posibilidades locales. Por ejemplo:

(H_2) Un grafo se transformará en uno de los grafos menos desequilibrados del conjunto que contiene al mismo grafo y sus adyacentes.

En función de la medida de desequilibrio adoptada, los resultados serán completamente diferentes. Obsérvese que ciertos índices de desequilibrio pueden ser tales que un grafo desequilibrado tenga sólo como adyacentes grafos menos equilibrados que él mismo. En este caso el grafo nunca tenderá a un estado de equilibrio, a menos que se introduzcan hipótesis suplementarias.

Adoptaremos aquí, como medida de desequilibrio, el grado $\delta\,(G)$ de desequilibrio ya estudiado anteriormente (Sec. 4).

(H_3) Los niveles de desequilibrio considerados en H_2 se miden por el grado de desequilibrio $\delta\,(G)$ definido en D_7.

TEOREMA 3.12. *Si G y G' son grafos algebraicos completos adyacentes,* $\delta\,(G) - (G') = -1,\ 0,\ \text{o}\ +1$.

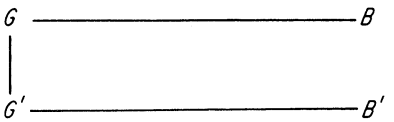


FIGURA 3.17

Prueba. Sean B y B' dos grafos equilibrados, tales que las distancias $d(G,B)$ y $d(G',B')$ en $\mathcal{L}_n^\sigma$ son $d(G,B) = \delta(G)$ y $d(G',B') = \delta(G)$ (Fig. 3.17). Consideremos el camino constituido por la arista (GG') y la pista $\theta(G'B')$; conduce desde G al grafo equilibrado y su longitud, que es igual a $(\delta(G') + 1)$, no puede ser, por tanto, inferior a $\delta(G)$ (cf. Teorema 3.11):

$$\delta(G') + 1 \geqq \delta(G),$$

de donde

$$\delta(G) - \delta(G') \leqq + 1.$$

Considerando, del mismo modo, el camino formado por la arista (G', G) y una pista $\theta(GB)$, hallamos

$$\delta(G) - \delta(G') \geqq - 1,$$

de aquí, el teorema.

El que grafos adyacentes *no* difieran en sus grados de desequilibrio, lo confirma el ejemplo de la figura 3.18: los dos grafos de grado $\delta = 1$ son en efecto adyacentes, puesto que basta cambiar el signo de la arista (d, c) para pasar del uno al otro; y ambos son efectivamente de grado $\delta = 1$ puesto que basta cambiar el signo de

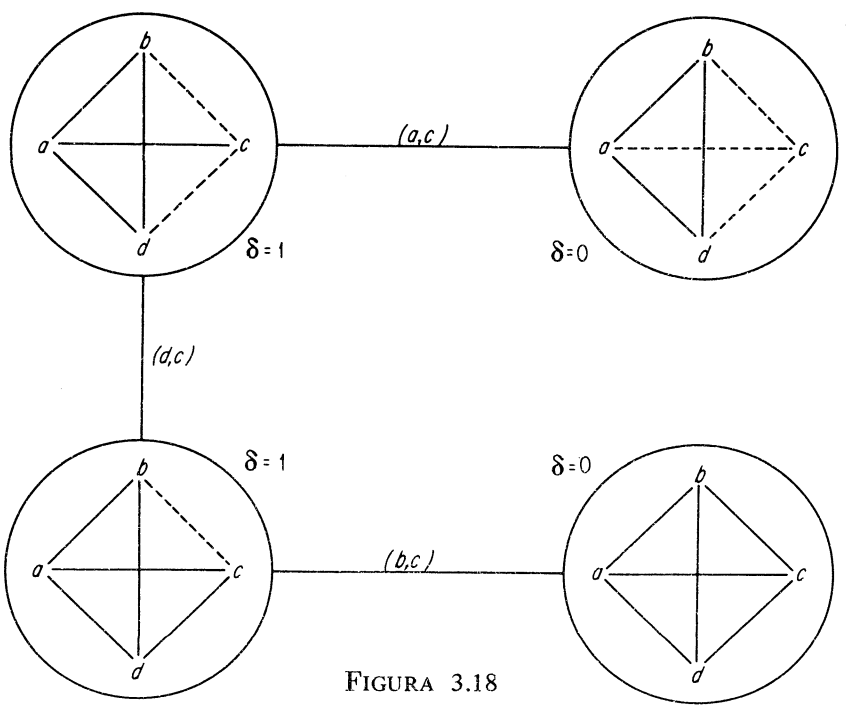


FIGURA 3.18

una sola arista, (a, c) o (b, c) —depende del caso—, para obtener grafos de los que es fácil verificar que son de grado $\delta = 0$, es decir, equilibrados.

TEOREMA 3.13. *Un grafo algebraico completo G no tiene adyacente G', tal que $\delta(G) - \delta(G') = 1$, si y sólo si G es equilibrado.*

Prueba. Sea G un grafo desequilibrado y B un grafo equilibrado, tales que $d(G,B) = \delta(G)$; existe una pista $\theta(GB)$ en $\mathcal{L}_n^{\sigma}$; sea G' un punto de esta pista, adyacente a G. Tenemos, evidentemente,

$$\delta(G') = \delta(G) - 1.$$

Si G es un grafo equilibrado, entonces $\delta(G) = 0$; para que fuera $\delta(G) - \delta(G') = 1$, necesitaríamos que $\delta(G') = -1$, lo cual es imposible por definición de δ.

Estos teoremas aseguran que, si el proceso de equilibramiento sigue las hipótesis H_1 a H_3, entonces tendrá un fin satisfactorio; se llegará a un grafo equilibrado, puesto que en cada etapa del proceso se podrá pasar a un grafo adyacente más equilibrado. Además, es evidente que si comenzamos a partir de un grafo G, el proceso tendrá un número de etapas igual a $\delta(G)$, dado que en cada etapa se reduce el desequilibrio en una unidad.

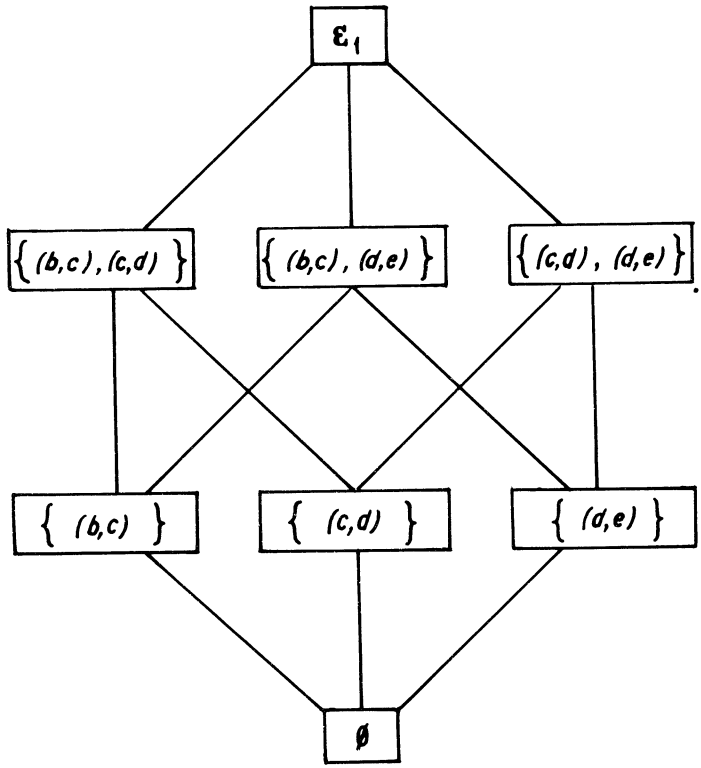


FIGURA 3.19

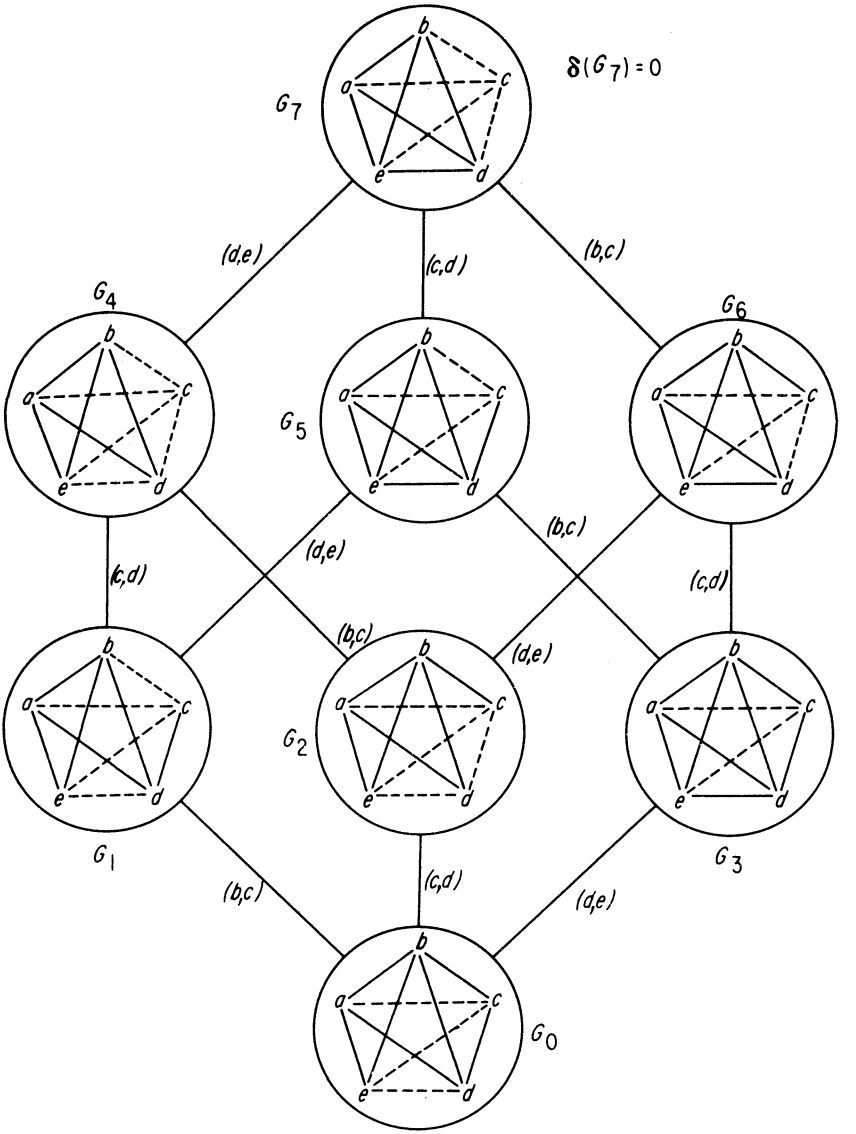


FIGURA 3.20

En general un grafo G puede conducir a varios grafos equilibrados. En efecto, hemos visto que un grafo podría admitir varios conjuntos mínimos de equilibramiento.

Las hipótesis H_1 a H_3 deben completarse por tanto con una hipótesis que defina el proceso:

(H_4) Si G tiene k grafos adyacentes más equilibrados que él mismo, la probabilidad de pasar de G a cada uno de estos k grafos es $1/k$.

El proceso de equilibramiento es, por consiguiente, traído al *paseo aleatorio* sobre *ciertos* caminos de $\mathcal{L}_n^\sigma$. Para hacer más precisos estos caminos consideremos uno de los conjuntos mínimos de equilibramiento. Por ejemplo, en el grafo de la figura 3.13, consideremos

$$\mathcal{E}_1 = \{(b, c), (c, d), (d, e)\} .$$

Sea $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_1)$ el conjunto de las partes de este conjunto. La figura 3.19 presenta la laticia de $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_1)$.

Hagamos corresponder un subgrafo de $\mathcal{L}_n^\sigma$ a cada parte de $\mathcal{E}_1$ del modo siguiente. Siendo G_0 el grafo que queremos equilibrar, asociamos el grafo G_i, obtenido a partir de G_0, a la parte u_i de $\mathcal{E}_i$, cambiando el signo de las aristas que forman u_i (Fig. 3.20); a la parte $\emptyset$ corresponde G_0 y a la parte $\mathcal{E}_1$ corresponde el grafo equilibrado que queríamos obtener. Es evidente que dos grafos G_i y G_j, que corresponden a las partes u_i y u_j, adyacentes en la laticia de $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_1)$, son dos grafos adyacentes en $\mathcal{L}_n^\sigma$ y viceversa.

En consecuencia los caminos de la laticia de $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_1)$ son caminos de $\mathcal{L}_n^\sigma$; y son estos caminos por los que se efectúa el proceso de equilibramiento. Pero la laticia de $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_1)$ no es una sublaticia de $\mathcal{L}_n^\sigma$; en efecto, si $u_i \subset u_j$, en $\mathcal{L}_n^\sigma$ tendríamos que $G_i \subset G_j$ si y sólo si las aristas cambiadas dentro de u_j, no dentro de u_i, fueran todas cambiadas de signo negativo a positivo; de hecho, en $\mathcal{L}_n^\sigma$ la disposición de los grafos en la figura 3.20 es la representada por la figura 3.21.

En la figura 3.20, el nivel de un grafo depende del número de signos cambiados y, en la figura 3.21, depende del número de aristas positivas. La figura que debemos analizar para seguir el proceso de equilibramiento es la figura 3.20; es obvio en efecto que *cuanto más ascendemos en esta laticia, más decrece el grado de desequilibrio.* Las hipótesis se interpretan de la siguiente manera. Un grafo se transformará en un *grafo adyacente de nivel superior* en las laticias del tipo de la de la figura 3.20: a partir de G_1 podremos pasar a G_4 o G_5, pero no a G_6, el cual no es adyacente; ni a G_2 o a G_0, que no son de nivel superior.

Para hacer más concreta la hipótesis H_4, debemos considerar todos los conjuntos mínimos de equilibramiento $\mathcal{E}_i$; y no sólo $\mathcal{E}_1$, como acabamos de hacer.

Pero detengámonos un instante: con el fin de estudiar cómo se pasa de un grafo algebraico a otro, hemos examinado la laticia $\mathcal{L}_n^\sigma$ de todos los grafos algebraicos completos de n puntos; después consideramos las rutas en $\mathcal{L}_n^\sigma$, es decir, tomamos $\mathcal{L}_n^\sigma$ como grafo (orientado), que entonces es un grafo de puntos que a su vez son grafos. Aquí se produce un cambio en el nivel de análisis, que puede confundir al lector. Sin embargo será necesario proceder de nuevo con tales cambios de niveles; por ejemplo, construimos un grafo, del que cada uno de sus puntos es un conjunto de grafos. Esto es necesario, puesto que estos cambios de nivel son todavía los mejores medios (cualquiera que sea la dificultad para el lector inexperto) para hacer patente ciertas propiedades de previos niveles a un nuevo nivel. De hecho el principio es el siguiente: a un cierto nivel de análisis nos encontramos diversas propiedades estructurales entrelazadas, pero de las que sólo una nos interesa; modificamos entonces nuestro plan de análisis, creando entidades matemáticas cuya estructura se reduce a la propiedad que nos interesa.

Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r$ los r conjuntos mínimos de equilibramiento de un gra-

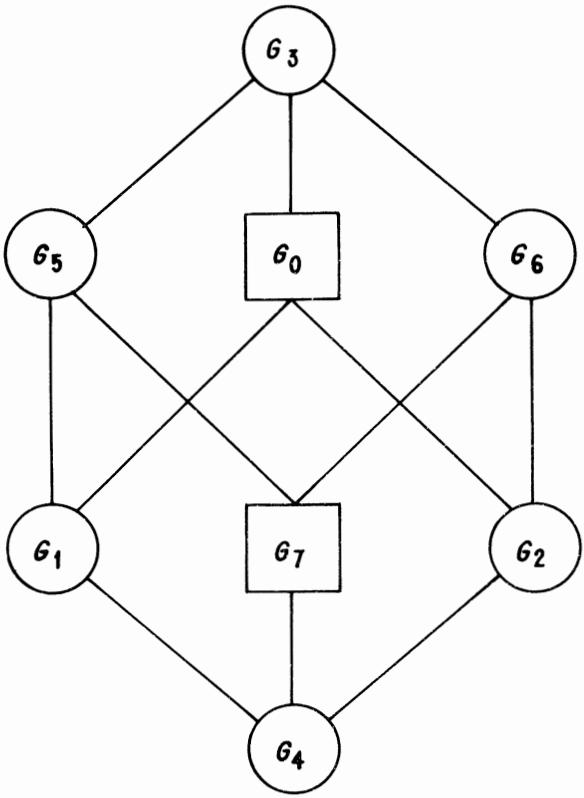


FIGURA 3.21

fo G; y sea $I = \{1, 2, ..., r\}$ el conjunto de *índices* de estos conjuntos. Para cada uno de estos conjuntos $\mathcal{E}_i$, hacemos, como anteriormente, la laticia de las partes $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_i)$; *reunimos* entonces estas r laticias en una estructura única. El diagrama comienza a resultar muy rápidamente imposible de representar aunque tomemos un ejemplo muy simplificado. Sea $r = 3$ y $\mathcal{E}_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\beta, \gamma, \delta\}$ y $\mathcal{E}_3 = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$ designando las letras griegas las *aristas* del grafo G. Obtenemos la figura 3.22.

Designemos por $u, u', ...$ los puntos de esta unión de laticias: son las partes de los conjuntos $\mathcal{E}_i$. Sea $\mathfrak{p}$ el conjunto de todos estos puntos de u:

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i) = \{u, u', ...\}.$$

La unión de una laticia puede ser considerada como un grafo L: $L = (\mathfrak{p}'; \Gamma)$, con $(u, u') \in \Gamma$ si y sólo si $u \subset u'$ y $|u' - u| = 1$. En otras palabras, L es el grafo obtenido a partir de un diagrama como el de la figura 3.22, al dirigir de abajo arriba las líneas que lo constituyen.

La hipótesis H_4 se convierte entonces en un paseo aleatorio sobre L:

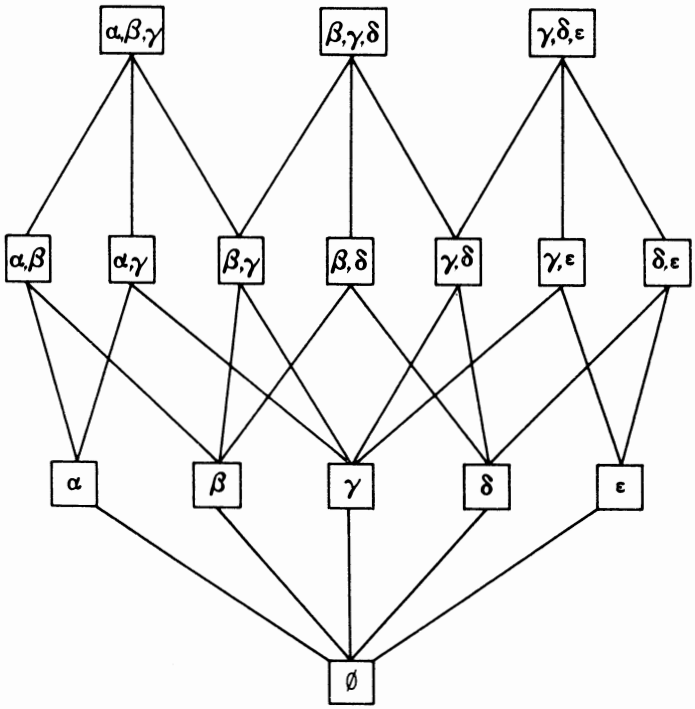


FIGURA 3.22

1. comenzamos a partir de $u = \emptyset$;
2. cuando estamos en el punto $u \in \mathfrak{p}$ tal que $|\Gamma u| \neq 0$, la probabilidad de pasar de u a $u' \in \Gamma u$ es igual a $1/|\Gamma u|$;
3. nos detenemos al llegar al punto u tal que $|\Gamma u| = 0$; esto ocurre si y sólo si u es uno de los conjuntos $\mathcal{E}_i$ (puesto que para todo $i, j \in I$, tenemos $\mathcal{E}_i \not\subset \mathcal{E}_j$).

Queremos saber entonces cuál es la probabilidad $p(\mathcal{E}_i)$ que tiene un grafo algebraico G_0 de conseguir la posición de equilibrio G_i, siendo G_i el grafo obtenido a partir de G_0 cambiando el signo de las aristas que figuran en $\mathcal{E}_i$.

Teóricamente este problema no presenta dificultades: puede resolverse enteramente sobre el grafo L, o sobre una *matriz estocástica* que podemos asociarle (como veremos más adelante). En la práctica, el cálculo se vuelve rápida y excesivamente complejo y uno se plantea si ciertas propiedades estructurales del grafo, relacionadas con su peculiar construcción, no permitirían una simplificación de los cálculos y, al mismo tiempo, si revelan ciertas propiedades matemáticas hasta entonces inadvertidas.

Para emprender este estudio necesitamos unos cuantos teoremas que no serán probados, porque son casi evidentes y porque pertenecen más a la teoría de laticias que a la de grafos.

Sea $\chi, \chi', \ldots$ cualquier parte no vacía del conjunto I de los índices que distinguen a los conjuntos $\mathcal{E}_i$.

TEOREMA 3.14. $\chi' \subset \chi \Leftrightarrow \bigcap_{i \in \chi} \mathcal{E}_i \subset \bigcap_{j \in \chi'} \mathcal{E}_j$

TEOREMA 3.15. $[u \in \bigcap_{i \in \chi} \mathfrak{p}(\bar{\mathcal{E}}_i)] \Leftrightarrow [\text{para todo } \alpha \in u : \alpha \in \bigcap_{i \in \chi} \mathcal{E}_i]$.

TEOREMA 3.16. si $\alpha \in u$,

$$\alpha \notin \bigcup_{i \in \chi} \mathcal{E}_i \Rightarrow u \notin \bigcup_{i \in \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i).$$

TEOREMA 3.17. si $u \subset u'$,

$$u \notin \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i) \Rightarrow u' \notin \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i).$$

Admitidos estos resultados, definimos para todo $\chi \subset I$,

$$Q_\chi = [\bigcap_{i \in \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i)] - [\bigcup_{j \notin \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_j)].$$

TEOREMA 3.18. *Si Q es el conjunto de los Q_χ, Q es una partición de* $\mathfrak{p} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i)$, *es decir,* $\bigcup_{\chi \subset I} Q_\chi = \mathfrak{p}$; *y para todo* χ *y* $\chi' \subset I$, $Q_\chi \cap Q_{\chi'} = \emptyset$.

Prueba. Mostremos que $\bigcup_{\chi \subset I} Q_\chi = \mathfrak{p}$; es decir, si $u \in \mathfrak{p}$, entonces existe un conjunto de índices $\chi \subset I$, tal que $u \in Q_\chi$; en efecto, sea χ el conjunto de índices $i \in I$, tal que $u \in \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i)$; por consiguiente tenemos

$$u \in \bigcap_{i \in \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i) \quad \text{y} \quad u \notin \bigcup_{j \notin \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_j);$$

de donde $u \in Q_\chi$.

Mostremos que para todo χ y $\chi' \subset I$, $Q_\chi \cap Q_{\chi'} = \emptyset$. Supongamos que es falso. Sea $u \in Q_\chi \cap Q_{\chi'}$, con $\chi \neq \chi'$; entonces, para todo $i \in \chi$,

$$u \in \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i),$$

y para todo $j \in \chi'$,

$$u \in \mathfrak{p}(\mathcal{E}_j).$$

Si $\chi' - \chi \neq \emptyset$, sea $h \in (\chi' - \chi)$; entonces,

$$h \notin \chi \quad \text{y} \quad u \in \bigcup_{h \notin \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_h);$$

de donde $u \notin Q_\chi$

Si $\chi - \chi' \neq \emptyset$, hallamos $u \notin Q_{\chi'}$; hay pues contradicción al suponer, $Q_\chi \cap Q_{\chi'} \neq \emptyset$.

Podemos hacer más concreta la definición de Q_χ considerando el ejemplo de la figura 3.22. Se utilizan círculos de Euler para representar los conjuntos $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_1)$, $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_2)$, $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_3)$, con $\mathcal{E}_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\beta, \gamma, \delta\}$, $\mathcal{E}_3 = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$ (Fig. 3.23.) La intersección de los círculos determina varias *regiones*, cada una de las cuales corresponde a un conjunto Q_χ:

$$Q_{123} = \{\emptyset, \{\gamma\}\}; \quad Q_{23} = \{\{\delta\}, \{\gamma, \delta\}\}; \text{ etc.}$$

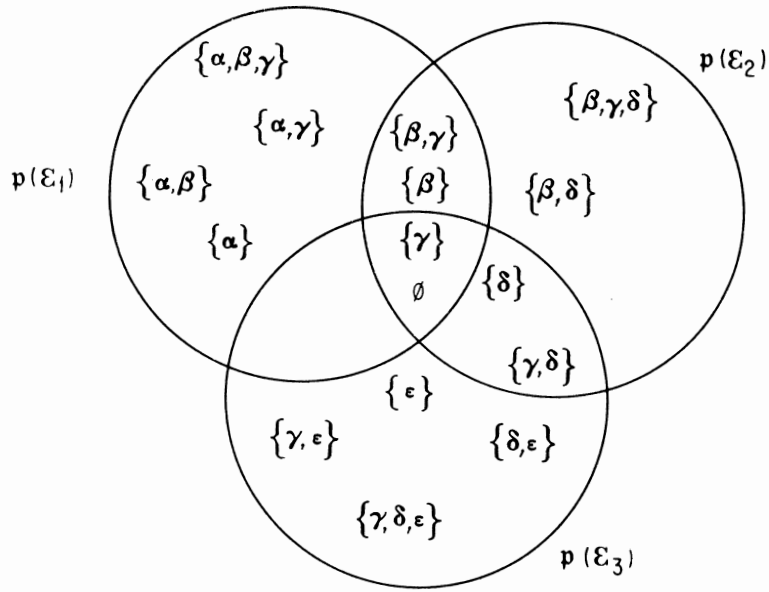


FIGURA 3.23

Observamos que $Q_{13} = \emptyset$, es decir, este conjunto Q_{13} no contiene ningún elemento de $\mathfrak{p}'$, lo cual no debe confundirse con la presencia de $\{\emptyset\}$ en Q_{123}, elemento de $\mathfrak{p}'$ resultante de no cambiar ninguna arista del grafo algebraico G_0.

Asociemos al grafo L un grafo *reducido* L^0 (cf. Cap. 1, Sec. 5.4) definido por

$$L^0 = (Q\,;\,\Delta)$$

donde Q es el conjunto de los Q_χ y $\Delta : (Q_\chi\,, Q_{\chi'}) \in \Delta$ si y sólo si $u \in Q_\chi$ y $u' \in Q_{\chi'}$ existen, siendo $(u, u') \in \Gamma$.

TEOREMA 3.19.

$$(Q_\chi, Q_{\chi'}) \in \Delta \Rightarrow \chi' \subset \chi.$$

Prueba. Si $(Q_\chi\, Q_{\chi'}) \in \Delta$, es porque existen $u \in Q_\chi$ y $u' \in Q_{\chi'}$ tales que $(u, u') \in \Gamma$; es decir, tales que $u \subset u'$; por consiguiente, $\alpha \in u'$, para todo $\alpha \in u$, pero (teorema 3.15), si $\alpha \in u$ entonces

$$\alpha \in \bigcap_{i \in \chi} \Sigma_i\,;$$

de donde, $\bigcap_{i \in \chi} \Sigma_i \subset \bigcap_{i \in \chi'} \Sigma_j$ y (teorema 3.14) $\chi' \subset \chi$.

TEOREMA 3.20. *Si* $u \in Q_\chi$, *entonces* $u' = u \cup \{\alpha\} \in Q_{\chi'}$, *si y sólo si*

$$\alpha \in \{ \bigcap_{i \in \chi'} \Sigma_i - \bigcup_{j \in \chi - \chi'} \Sigma_j \}\,.$$

Prueba de condición suficiente. Mostremos que $u' \in \bigcap_{i \in \chi'} \mathfrak{p}\,(\Sigma_i)$. Tenemos que

$$u \in Q_\chi = u \bigcap_{h \in \chi} \mathfrak{p}\,(\Sigma_h)\ \text{(definición de } Q_\chi)$$

$$\Rightarrow \text{para todo } \beta \in u\text{: } \beta \in \bigcap_{h \in \chi} \mathcal{E}_h \text{ (teorema 3.45).}$$

Por otra parte, tenemos la hipótesis: $u \subset u'$ y $|u' - u| = 1$; de donde

$$(Q_\chi, Q_{\chi'}) \in \Delta \qquad \text{(definición de } \Delta)$$
$$\Rightarrow \chi' \subset \chi \qquad \text{(teorema 3.19)}$$
$$\Rightarrow \bigcap_{h \in \chi} \mathcal{E}_h \subset \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i \text{ (teorema 3.14)}$$

por tanto, para todo $\beta \in u$, $\beta \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i$. Puesto que

$$\alpha \in \{ \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i - \bigcup_{j \in \chi - \chi'} \tilde{\mathcal{E}}_j \},$$

entonces $\alpha \in \bigcap_{i \in \chi'} \tilde{\mathcal{E}}_i$ y para todo $\beta \in u'$,

$$\beta \in \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i \Rightarrow u' \in \bigcap_{i \in \chi'} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i) \qquad \text{(teorema 3.15).}$$

Mostremos ahora que $u' \notin \bigcup_{i \notin \chi'} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i)$ Por definición de α,

$$\alpha \notin \bigcup_{j \in \chi - \chi} \mathcal{E}_j,$$

de donde
$$u' \notin \bigcup_{j \in \chi - \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_j) \qquad \text{(teorema 3.16).}$$

Por otra parte,

$$u \in Q_\chi \Rightarrow u \notin \bigcup_{k \notin \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_k) \text{ (definición de } Q_\chi).$$
$$\Rightarrow u' \notin \bigcup_{k \notin \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_k) \qquad \text{(teorema 3.17);}$$

de donde
$$u' \notin \bigcup_{l \notin \chi'} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_l).$$

por tanto,
$$u' \in Q_{\chi'}.$$

Prueba de condición necesaria. Mostremos que si $u \in Q_\chi$ y $u' \in Q_{\chi'}$, con $u' - u = \{\alpha\}$, entonces

$$\alpha \in \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i.$$

En efecto,
$$u' \in Q_{\chi'} \Rightarrow u' \in \bigcap_{i \in \chi} \mathfrak{p}(\mathcal{E}_i) \text{ (definición de } Q_{\chi'})$$

y
$$\alpha \in u' \Rightarrow \alpha \in \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i \qquad \text{(teorema 3.15).}$$

Mostremos ahora que $\alpha \notin \bigcup_{j \in \chi - \chi'} \mathcal{E}_j$. Supongamos que, por el contrario,

$$\alpha \in \bigcup_{j \in \chi - \chi'} j;$$

puesto que existe un conjunto de índices, $\chi'' \subset \chi - \chi'$, $\chi'' = \emptyset$, tal que

$$\alpha \in \bigcap_{h \in \chi''} \tilde{\mathcal{E}}_h.$$

Sea $\chi''' = \chi' - \chi''$; entonces

$$\alpha \in \bigcap_{l \in \chi'''} \mathcal{E}_l \text{ y } \alpha \notin \bigcup_{m \in \chi - \chi'''} \mathcal{E}_m;$$

de donde, por la condición suficiente del teorema,

$$u \in Q_{\chi'''} \neq Q_{\chi'};$$

lo cual es contradictorio; por consiguiente:

$$\alpha \notin \bigcup_{i \in \chi - \chi'} \mathcal{E}_j \quad \text{y} \quad \alpha \in \{ \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i - \bigcup_{j \in \chi - \chi'} \mathcal{E}_j \}$$

Este teorema es importante porque muestra que una propiedad esencial de los grafos L o L^0 puede ser expresada en función de los conjuntos $\mathcal{E}_i$, sin pasar por los conjuntos $\mathfrak{p}(\mathcal{E}_i)$, lo cual simplifica considerablemente nuestro problema.

TEOREMA 3.21. *Cualquiera que sea el punto* $u \in Q_\chi$ *en el que nos encontremos, la probabilidad (según* H_4*) de pasar a* $Q_{\chi'}$ *es*

$$p(\chi\chi') = \frac{| \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i - \bigcup_{j \in \chi - \chi'} \mathcal{E}_j |}{\sum_{\chi'' \subset \chi} | \bigcap_{h \in \chi''} \mathcal{E}_h - \bigcup_{l \in \chi - \chi''} \mathcal{E}_l |}$$

Prueba. Sea u un punto de Q_χ; si

$$\alpha \in \{ \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i - \bigcup_{j \in \chi - \chi'} \mathcal{E}_j \},$$

entonces, $u' = u \cup \{\alpha\}$ es un punto de $Q_{\chi'}$, por el teorema precedente; y puesto que $u \subset u'$ y $|u' - u| = 1$, u' es adyacente a u en L. Por consiguiente, podremos ir de u a u' en el proceso de equilibramiento, pero en Q_χ hay

$$| \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i - \bigcup_{j \in \chi - \chi'} \mathcal{E}_j |$$

puntos adyacentes de u, a los que se podrá ir desde u; este resultado es independiente del u de Q_χ que tomamos. Por tanto, la probabilidad de pasar a $Q_{\chi'}$, cuando estamos en Q_χ, es proporcional a

$$| \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i - \bigcup_{j \in \chi - \chi'} \mathcal{E}_j |;$$

considerando todos los $Q_{\chi''}$ a los que podemos ir desde un punto de Q_χ, es decir, tales que $\chi'' \subset \chi$ (Teorema 3.19), hallamos la fórmula mecionada de $p(\chi\chi')$.

TEOREMA 3.22. *La probabilidad de que se equilibre un grafo* G *según el conjunto mínimo de equilibramiento* $\mathcal{E}_i$ *es:*

$$p(\mathcal{E}_i) = \sum_{i \in \chi \subset I} \sum_{i \in \chi' \subset \chi} \cdots \sum_{i \in \chi''' \subset \chi''} p(I\chi) \cdot p(\chi\chi') \cdots \cdot p(\chi''\chi''') \cdot p(\chi'''i).$$

Prueba. Para probar esta fórmula es conveniente asociar al grafo L^0 una *matriz estocástica* construida del siguiente modo.

Consideremos todos los conjuntos $\chi \subset I$; cada uno de estos conjuntos figura a la cabeza de una fila y de una columna de la matriz. Si $\chi' \not\subset \chi$, se pone cero en la casilla $(\chi\chi')$; pero si $\chi' \subset \chi$, entonces se pone $p(\chi\chi')$. Si $|\chi| > 1$, se pone cero

en las casillas de la diagonal y si $|\chi| = 1$, se pone 1. Esta matriz da las probabilidades de pasar de Q_χ a $Q_{\chi'}$; es evidente que necesitamos $(|I| - 1)$ etapas para ir de Q_I a cada Q_i (cf. Teoremas 1.6 y 1.7). Por tanto, si se eleva la matriz a la potencia $(|I| - 1)$, obtenemos la probabilidad $p(\mathcal{E}_i)$ en la casilla (I_i), dándonos el teorema la fórmula correspondiente.

Ejemplo. Sea $\mathcal{E}_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\beta, \gamma, \delta\}$, y $\mathcal{E}_3 = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$. Tenemos los conjuntos Q_χ: $Q_{123}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}, Q_1, Q_2, Q_3$.

Primero construimos una matriz que da a la casilla $(\chi\chi')$ del número

$$\left| \bigcap_{i \in \chi'} \mathcal{E}_i - \bigcup_{j \in \chi - \chi'} j \right|$$

para χ' incluido estrictamente en χ:

	(123)	(12)	(13)	(23)	(1)	(2)	(3)	
(123)		1		1	1		1	4
(12)					1	1		2
(13)					2		2	4
(23)						1	1	2
(1)								
(2)								
(3)								

Dividiendo en cada fila por el total de la fila, obtenemos (Teorema 3.21) los valores $p(\chi\chi')$. Se añade la unidad en las casillas (1, 1), (2, 2) y (3, 3) y obtenemos la siguiente matriz estocástica:

	(123)	(12)	(13)	(23)	(1)	(2)	(3)	
(123)		0,25		0,25	0,25		0,25	1
(12)					0,50	0,50		1
(13)					0,50		0,50	1
(23)						0,50	0,50	1
(1)					1,0			1
(2)						1,0		1
(3)							1,0	1

Puesto que $|I| = 3$, se eleva a la potencia $(|I| - 1) = 2$. En cualquier caso, basta considerar las casillas [(123), (1)], [(123), (2)], y [(123), (3)]. Obtenemos

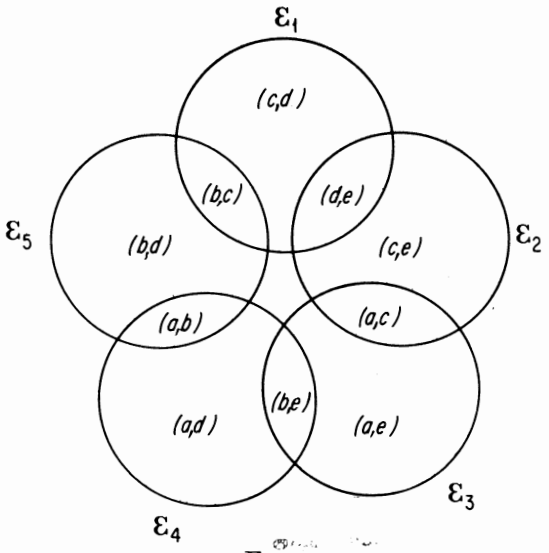


FIGURA 3.24

$$p(\mathcal{E}_1) = 0{,}375;\ p(\mathcal{E}_2) = 0{,}250;\ p(\mathcal{E}_3) = 0{,}375,$$

Se verifica que $\Sigma_i p(\mathcal{E}_i) = 1$.

Observamos que $p(\mathcal{E}_1) = p(\mathcal{E}_3)$; esto se produce por la simetría de los conjuntos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_3$ en relación con el conjunto $\mathcal{E}_2$. A menudo tales regularidades en las relaciones entre los conjuntos $\mathcal{E}_i$ evitan los cálculos; así la figura 3.24 da $r = 5$ conjuntos mínimos de equilibramiento del grafo de la figura 3.13. Es suficiente esta figura para mostrar que, en este caso,

$$p(\mathcal{E}_i) = 0{,}20 \quad \text{para } i = 1, 2, ..., 5$$

Otras hipótesis sobre procesos de equilibramiento. Podemos sustituir las hipótesis H_1 a H_4 por otras más o menos parecidas. Por ejemplo, podemos rehacer este conjunto de hipótesis integrándole la siguiente:

(H_5) Un grafo tiende en cada etapa a incrementar el número de sus aristas positivas, hasta un grado compatible con el decrecimiento de su grado de desequilibrio.

Lo que corresponde a la idea de que los miembros de un grupo prefieren mantener relaciones amistosas en lugar de hostiles. Matemáticamente significa que pasamos de un grafo a un adyacente, superior al mismo tiempo en L (cf., por ejemplo, la figura 3.20) y en $\mathcal{L}_n^\sigma$ (cf. Fig. 3.21). Por tanto, para pasar de $G = (X; P, N)$ a $B_i = (X; P_i, N_i)$, un grafo equilibrado obtenido a partir del conjunto mínimo de equilibramiento $\mathcal{E}_i$ de G, pasaremos necesariamente por el grafo

$$G_i = (X; (P_i \cup P), (N_i \cap N);$$

tendremos, pues, que calcular, por el método previamente mostrado, la probabilidad de alcanzar cada uno de estos grafos G_i y entonces, a partir de éstos, alcanzar

los grafos B_i. (Excepto para casos especiales, tendremos una probabilidad igual a uno de alcanzar B_i si nos encontramos en G_i).

Pueden definirse muchas otras hipótesis. Con el fin de no salirnos del esquema examinado, obsérvese que los grafos $G' = (X; P', N')$ adyacentes a un grafo $G = (X; P, N)$ pueden distribuirse en seis clases, según la siguiente tabla:

$\lvert P\rvert - \lvert P'\rvert$ \ $\delta(G) - \delta(G')$	-1	0	$+1$
-1	(11)	(12)	(13)
$+1$	(21)	(22)	(23)

Las hipótesis estudiadas implican que preferimos, por una parte, (13) a (12) y (12) a (11) y por otra, (13) a (23), (12) a (22), (11) a (21); en efecto, siempre se tiene (a menos que G sea equilibrado) un representante de la clase (13) o de la clase (23).

Si la clase (13) es vacía, establecimos en H_5 que (23) era preferida a las demás clases; podríamos ahora establecer que (23) es preferida a (11), pero que (12) es preferida a (23) ...

Otros tipos de hipótesis: los procesos de equilibramiento dependen en el grupo del líder del mismo, el cual trata primeramente de equilibrar los triángulos en los que aparece. Bastará entonces tomar a este líder como eje de la base de desequilibrio del grafo y el proceso será susceptible de tratamiento algebraico.

No hay razón para preferir una hipótesis u otra: la psicología de grupo no se ha ocupado demasiado todavía en nuestro problema y el estudio de todas las posibles hipótesis es más una cuestión de juegos matemáticos que de investigación psicosocial.

Los ejemplos que hemos estudiado o bosquejado conducen ahora al siguiente programa de trabajo. Cualesquiera que sean las hipótesis psicológicas propuestas, éstas formularán la dependencia de ciertas *relaciones entre las estructuras de dos grafos* al pasar de un grafo a otro. Definimos sobre el conjunto de grafos posibles una *estructura que representa las relaciones consideradas* y este nuevo programa de análisis permitirá la descripción de las consecuencias de las hipótesis tomadas.

Previamente (Teorema 3.22) hemos utilizado una matriz estocástica, es decir, nos hemos referido a los procesos de Markov. Se podría pensar que las técnicas de Markov bastarían sin hacer uso de la teoría de grafos, considerando la matriz de posibles pasos de un grafo a otro; pero esta matriz tendría algunas casillas nulas, otras iguales a la unidad y no de modo arbitrario; de hecho, la estructura de la matriz representa tan sólo las propiedades estructurales estudiadas en la teoría de grafos. Además, varios trabajos (Rouanet, 1960; Rosenblatt, 1957; también Harary, 1959c) han mostrado que el estudio de las cadenas de Markov se beneficiarían con la teoría de grafos; en especial, las propiedades asintóticas de una cadena de Markov aparecerían inmediatamente en un grafo que puede asociarse a la matriz que define la cadena de Markov. En el problema que nos ocupa, es precisamente este grafo, aso-

ciado con la cadena de Markov, el que está directamente determinado por el estudio estructural; por consiguiente, el estudio del problema puede ser realizado con independencia de los procesos de Markov.

6. Aplicaciones.

Diversos *estudios experimentales* (Abelson y Rosenberg, 1958; Jordan, 1953; Morrisette, 1958) muestran que la teoría del equilibramiento de grafos constituye al menos una buena guía para el análisis de situaciones psicológicas reales; no obstante, estos resultados no son demasiado interesantes aquí, porque, por una parte, las situaciones consideradas se representan por medio de grafos más complejos que los grafos algebraicos completos simétricos que hemos estudiado y, por otra parte, los autores han dedicado escasa atención a la evolución misma de los procesos.

El teorema 3.1, en virtud del cual una situación está en equilibrio si y sólo si pueden los puntos distribuirse en dos clases, tales que las relaciones intra-clases son positivas y las inter-clases son negativas, es sin duda susceptible de una interesante *aplicación política.* Pueden mencionarse, a nivel mundial, las políticas de "bloques", pudiendo estudiarse desde este punto de vista la evolución de los votos en las Naciones Unidas; aunque no deberíamos olvidar que la búsqueda de equilibrio, tal como lo hemos estudiado, indudablemente no es el único factor en la evolución de las estructuras de grupo.

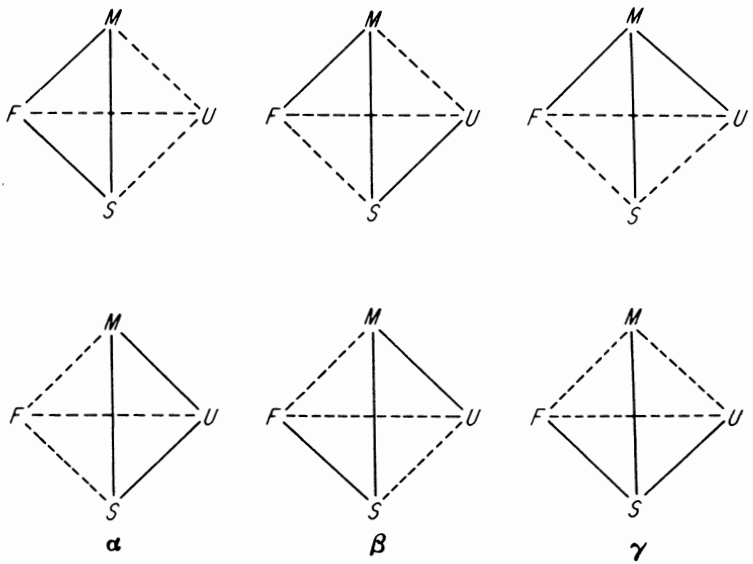


Figura 3.25

Nos limitaremos a estudiar una aplicación antropológica. Lévi-Strauss (1958, Cap. 2, pp. 50 ss.; Cap. 4, pág. 38*) considera que el "núcleo de parentesco" en sociedades primitivas está constituido por las siguientes cuatro personas, el hijo (S), el padre (F), la madre (M) y el tío materno (hermano de la madre) (U). En cada sociedad estudiada, se observa una gran estabilidad en las relaciones, positivas o negativas, entre estas cuatro personas. El autor sólo da las relaciones (FM), (MU), (US), (SF); y de acuerdo con los hechos sólo aparecen seis estructuras. Nos inclinamos a pensar que las dos relaciones omitidas (MS) y (UF) son, respectivamente, positivas y negativas en todos los casos. Obtenemos así los seis grafos algebraicos completos de la figura 3.25.

Estos seis grafos se agrupan en tres clases, α, β, γ, de dos grafos cada una; los dos grafos de cada clase se deducen uno del otro sustituyendo *F* por *U* y *U* por *F*, en α y en β; y en γ, sustituyendo *M* por *S* y *S* por *M*.

Apliquemos nuestros métodos analíticos a estos grafos. Obtenemos la siguiente tabla.

	α	β	γ
δ	0	1	2
$\mathcal{E}_i$	$\emptyset$	$\{(MS)\}$	$\{(MS),(FU)\}$ $\{(MU),(FS)\}$ $\{(MF),(SU)\}$

En primer lugar se evidencia que los grafos de la misma clase tienen exactamente las mismas propiedades (desde el punto de vista de nuestro análisis).

Los grafos α están en equilibrio perfecto.

Los grafos β son moderadamente desequilibrados, pero el único conjunto mínimo de equilibramiento está constituido por la arista *(MS)*; parece como si esta arista resistiera cualquier cambio de signo, tanto más cuanto el desequilibrio es débil. Se pueden esperar diversos fenómenos, aunque no claramente manifestados, que nuestro modelo no nos permitirá estudiar con detalle.

Finalmente, los grafos γ son anti-equilibrados (todos los triángulos son negativos). Hay tres conjuntos mínimos de equilibramiento, pero uno de ellos incluye la arista *(MS)*, de la cual hemos supuesto una cierta resistencia al cambio. Quedan los conjuntos $\{(MU),(FS)\}$ y $\{(MF),(SU)\}$. Se observa que utilizando uno u otro

*El libro de C. Lévi-Strauss es una colección de artículos. El Cap. 2, "L'analyse structurale en linguistique et en anthropologie" tiene una nota que dice: "Publié sous ce titre, *Word, Journal of the linguistic circle of New York*, vol. 1, num. 2 (August, 1945), p.p. 1-21". El Cap. 4, "Linguistique et anthropologie", tiene la nota: "Traduit et adapté de l'original anglais, *Conference of Anthropologists and Linguists*, Bloomington, Indiana, 1952. Published on the basis of a transcription from a recording on a magnetic tape in *Supplement to International Journal of American Linguistics*, vol. 19 num. 2 (April 1953), mem. 8, 1953".

de estos dos conjuntos, cada grafo γ da un grafo α; concluimos que una estructura familiar del tipo γ tiene una baja probabilidad de supervivencia y que la desaparición de tal estructura conduce a la aparición de una estructura del tipo α.

Aunque esencialmente sobre base observacional y sin ningún recurso de análisis dentro de la teoría de grafos, Lévi-Strauss (1958, p. 83) escribe: "a menudo se encuentran disposiciones del tipo α; por otra parte, las disposiciones del tipo β son frecuentes aunque a veces se pierden; y aquéllas del tipo γ son raras y quizás imposibles en forma bien definida, dado que correrían el riesgo de provocar una ruptura en la estructura elemental".

Parece que la congruencia entre el modelo y la realidad es favorablemente satisfactoria.

BIBLIOGRAFIA

ABELSON, R. P., y M. J. ROSENBERG, 1958, "Symbolic psycho-logic: a model of attitudinal cognition" *Behavior. Sc., 3,* 1–13.

APOSTEL, L., 1957, "Equilibre, logique et théorie des graphes" en Apostel, Mandelbrot y Piaget, *Logique et équilibre* (Paris, Presses Universitaires de France).

BAVELAS, A., 1948, "A mathematical model for group structures" *Appl. Anthrop., 7,* 16–30.

BAVELAS, A., 1950, "Communication patterns in task-oriented groups" *J. Acoust. Soc. Amer., 57,* 271–282.

BERGE, C., 1958, *Théorie des graphes et ses applications* (Paris, Dunod). Traducción española: *Teoría de las Redes y sus Aplicaciones* (México: CECSA, 1962).

BRATTON, D., 1955, "Efficient communication networks" *Cowles Comm. Disc. Paper,* 2119.

CAMION, P., 1960, "Quelques propriétés des chemins et circuits hamiltoniens dans la théorie des graphes" *Cahiers du Centre d'Etude et de Recherche Opérationnelle, 2:* 1, 5–36.

CARTWRIGHT, D. y F. HARARY, 1956, "Structural balance: a generalization of Heider's theory" *Psychol. Rev., 63,* 277–293.

CHANDESSAIS, C., 1957, "Application d'un modèle topologique à l'étude du moral" *Travail Humain, 20,* 8–29.

CHRISTIE, L. S., R. D. LUCE y J. MACY, JR., 1952, *Communication and learning in task-oriented groups,* Research Laboratory of Electronics, M.I.T., Technical Report 231.

DAILEY, C. A., 1959, "Graph theory in the analysis of personal documents" *Hum. Relat., 12,* 65–74.

DEUTSCH, M. y H. B. GERARD, 1955. "A study of normative and informational social influences upon individual judgment" *J. Abn. Soc. Psychol., 51,* 629–636.

DUBREIL, P. y DUBREIL-JACOTIN, M. L., 1961, *Leçons d'algèbre moderne* (Paris, Dunod).

EGAN, J. P., F. R. CLARKE y E. C. CARTERETTE, 1956, "On the transmission and confirmation of messages in noise" *J. Acoust. Soc. Amer., 28,* 536–550.

FESTINGER, L., 1949, "The analysis of sociograms using matrix algebra" *Human. Rel., 2,* 153–158.

FESTINGER L., 1950, "Informal social communication". *Psychol. Rev., 57,* 271–282.

FLAMENT, C., 1956, "Changements de rôles et adaptation à la tâche dans des groupes de travail utilisant divers réseaux de communication" *Année Psychol., 56,* 411–432.

FLAMENT, C., 1958a, "La performance des groupes de travail; rapports entre la structure de l'activité et celle du réseau de communication" *Année Psychol., 58,* 71–89.

FLAMENT, C., 1958b, "L'étude mathématique des structures psycho-sociales" *Année Psychol., 58,* 119–131.

FLAMENT, C., 1958c, "Performance et réseaux de communication" *Bulletin du Centre d'Etudes et de Recherches Psychotechniques, 7,* 97–106.

FLAMENT, C., 1958d, "Analyse pluridimensionnelle des structures hiérarchiques intransitives" *Bulletin du Centre d'Etudes et de Recherches Psychotechniques, 7,* 171–179.

FLAMENT, C., 1959a, "Nombre de cycles complets dans un réseau de communication; fonction caractéristique d'un graphe et ligne de Hamilton" *Bulletin du Centre d'Etudes et de Recherches Psychotechniques, 8,* 105–110.

FLAMENT, C., 1959b, "Modèle stratégique des processus d'influence sociale sur les jugements perceptifs" *Psychol., Française, 4,* 91–101.

FLAMENT, C., 1960, "L'étude structurale des groupes" *Bull. Psychol., 13,* 417–425.

FLAMENT, C., 1961, "Processus d'influence sociale et réseau de communication" *Psychol., Française, 6,* 115–125.

FLAMENT, C., 1962a, "La mesure en psychologie sociale" en Faverge, Flament, *et al., Les problèmes de la mesure en psychologie* (Paris, Presses Universitaires de France).

FLAMENT, C., 1962b, "Les processus de communication" en Fraisse et Piaget, *Traité de psychologie expérimentale* (Paris, Presses Universitaires de France).

FLAMENT, C., 1965, *Réseaux de communication et structures de groupe* (Paris, Dunod).

FRENCH, J. R. P., JR., 1956, "A formal theory of social power" *Psychol. Rev., 63,* 181–194.

FREY, L., "La démocratie objectivement définie" *Rev. Française. Sc. Politique, 10,* 66–82.

GILCHRIST, J. C., M. E. SHAW y L. C. WALKER, 1954, "Some effects of unequal distribution of information in a wheel group structure". *J. Abn. Soc. Psychol., 49,* 554–556.

GUETZKOW, H. y H. A, SIMON, 1955, "The impact of certain communication nets upon organization and performance in task-oriented groups" *Management Sc., 1,* 233–250.

HARARY F., 1953, "On the notion of balance of a signed graph" *Mich. Math. J., 2,* 143–146.

HARARY F., 1955, "On local balance and *n*-balance in signed graphs" *Mich. Math. J., 3,* 37–41.

HARARY, F., 1957, "Structural dualitv" *Behavior. Sc., 2,* 255–265.

HARARY, F., 1959a, "Status and contra-status" *Sociometry, 22,* 23–43.

HARARY, F., 1959b, "On the measurement of structural balance" *Behavior, Sc., 4,* 316–323.

HARARY, F., 1959c, "A criterion for unanimity in French's theory of social power" en Cartwright, *Studies in social power* (Ann Arbor, Institute for Social Research).

HARARY, F. y R. Z. NORMAN, 1953, *Graph theory as a mathematical model in social science* (Ann Arbor, Institute for Social Research).

HARARY, F. y I. C. ROSS, 1954, "The number of complete cycles in a communication network" *J. Soc. Psychol., 40,* 329–332.

HARARY, F. y I. C. ROSS, 1957, "A procedure for clique detection using the group matrix" *Sociometry, 20,* 205–215.

HEIDER, F., 1946, "Attitudes and cognitive organization" *J. Psychol., 21,* 107–112.

HEISE, G. A. y G. A. MILLER, 1951, "Problem solving by small groups using various communication nets" *J. Abn. Soc. Psychol., 46,* 327–335.

HIROTA, K., 1953, "Group problem solving and communication" *Jap. J. Psychol." 24,* 105–113.

JAULIN, B., 1961, "Sur une méthode de détermination des cliques dans un graphe symétrique", *C.-R. du Séminaire sur les Modèles Mathematiques dans les Sciences Sociales,* E.P.H.E., 1960-1961, 3er fascículo, 50–57 (multicopista).

JORDAN, N., 1953, "Bahavioral forces that are a function of attitudes and of cognitive organization" *Hum. Relat., 6,* 273–287.

KRUSKAL, J. B., JR., 1956, "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem" *Proc. Amer. Math. Soc., 7,* 48–50.

LANZETTA, J. T. y T. B. Roby, 1955, *A framework for the study of work-group structure and task parameters,* USAF Personnel and Training Research Center, Randolph Field, Texas (borrador no publicado).

LEAVITT, H. J., 1951. "Some effects of certain patterns on group performance" *J. Abn. Soc. Psychol., 46,* 38–50.

LEVI-STRAUSS, C., 1958, *Anthropologie structurale* (Paris, Plon).

LOBSTEIN, J., 1958, "Structure=réseau de communication" *Travail et Méthodes,* 67–73.

LUCE, R. D., 1950, "Connectivity and generalized cliques in sociometric group structure" *Psychomet., 15,* 169–190.

LUCE, R. D., 1951, *The theory of networks,* Group Network Laboratory, Research Laboratory of Electronics, M.I.T. (multicopista).

LUCE, R. D., 1952a, "A note on Boolean matrix theory" *Proc. Amer. Math. Soc., 3,* 382–388.

LUCE, R. D., 1952b, "Two decomposition theorems for a class of finite oriented graphs" *Amer. J. Math., 74,* 701–722.

LUCE, R. D., 1953, "Networks satisfying minimality conditions" *Amer. J. Math., 75,* 825–838.

LUCE, R. D., J. MACY, JR., L. S. CHRISTIE y H. D. HAY, 1953, *Information flow in task-oriented groups,* Research Laboratory of Electronics, M.I.T., Technical Report 264.

LUCE, R. D. y A. D. PERRY, 1949, "A method of matrix analysis of group structure" *Psychomet., 14,* 95–116.

MACY, J., JR., L. S. CHRISTIE y R. D. LUCE, 1953, "Coding noise in a task-oriented group" *J. Abn. Soc. Psychol., 48,* 401–409.

MASON, S. J., 1953, *On the logic of feedback,* Research Laboratory of Electronics, M.I.T., Technical Report 153.

MASON, S. J., 1956, "Feedback theory - further properties of signal-flow graphs" *Proc. Ire, 44,* 920–926.

MILLER, G. A., 1951, *Language and communication* (New York, McGraw-Hill Book Co.).

MORISSETTE, J. O., 1958, "An experimental study of the theory of structural balance" *Hum. Rel., 11,* 329–354.

MULDER, M., 1959a, "Power and satisfaction in task-oriented groups" *Acta Psychol., 16,* 178–225.

MULDER, M., 1959b, "Group structure and group performance" *Acta Psychol., 16,* 356–402.

MULDER, M., 1960a, "Communication structure, decision structure and group performance" *Sociometry, 23,* 1–14.

MULDER, M., 1960b, "The power variable in communication experiments" *Hum. Rel., 13,* 241–257.

RESTLE, F., 1959, "A metric and an ordering on sets" *Psychometrika, 24,* 207–220.

RESTLE, F., 1961, *Psychology of judgment and choice, a theoretical essay* (New York, John Wiley & Sons).

ROBY, T. B., 1962, "Subtask phasing in small groups" en Criswell, Solomon y Suppes, *Mathematical Methods in Small Group Processes* (Stanford, Calif., Stanford University Press).

ROSENBLATT, D., 1957, "On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean relation matrices and stochastic matrices" *Naval Res. Logist. Quart., 4,* 151–168.

ROSS, I. C. y F. HARARY, 1952, "On the determination or redundancies in sociometric chains" *Psychomet., 17,* 195–208.

ROSS, I. C. y F. HARARY, 1955, "Identification of the liaison persons of an organization using the structure matrix" *Management Science, 1,* 251–258.

ROSS, I. C. y F. HARARY, 1959, "A description of strengthening and weakening members of a group" *Sociometry, 22,* 139–147.

ROUANET, H., 1960, "Les chaines de Markov en Psychologie: introduction aux modèles stochastiques d'apprentissage" *Bull. Centre Etudes Recherches Psychotechniques, 9,* 399–432.

ROY, B., 1961, *Cheminement et connexité dans les graphes: application aux problèmes d'ordonnancement* (Paris, Société d'Economie et de Mathematique Appliquée).

SHANNON, C. E., 1948, "A mathematical theory of communication" *Bell System Tech., J., 27,* 380–423, 623–656.

SHAW, M. E., 1954a, "Group structure and the behavior of individuals in small groups" *J. Psychol., 38,* 139–149.

SHAW, M. E., 1954b, "Some effects of problem complexity upon problem solution efficiency in different communication nets" *J. Exper. Psychol., 48,* 211–217.

SHAW, M. E., 1954c, "Some effects of unequal distribution of information upon group performance in various communication nets" *J. Abn. Soc. Psychol., 49,* 547–553.

SHAW, M. E., 1955, "A comparison of two types of leadership in various communication nets" *J. Abn. Soc. Psychol., 50,* 127–134.

SHAW, M. E., 1956, "Random vs. systematic distribution of information in communication nets" *J. Personal., 25,* 59–69.

SHAW, M. E. y J. C. GILCHRIST, 1956, "Intra-group communication and leader choice" *J. Soc. Psychol., 43,* 133–138.

SHAW, M. E. y G. H. ROTHSCHILD, 1956, "Some effects of prolonged experience in communication nets" *J. Appl. Psychol., 40,* 281–286.

SHAW, M. E., G. H. ROTHSCHILD y J. F. STRICKLAND, 1957, "Decision processes in communication nets" *J. Abn. Soc. Psychol., 54,* 323–330.

SHELLY, M. W. y J. C. GILCHRIST, 1958, "Some effects of communication requirements in groups structures" *J. Soc. Psychol., 48,* 37–44.

WALKER, L. C., *The effects of group size and group structure on problem-solving behavior in small groups* (manuscrito no publicado).

INDICE DE AUTORES Y MATERIAS

Abelson, R. P. y Rosenberg, M. J., 115, 132
Actitud, descriptiva, 86
Actividad, grupo, 58
  aspectos de, 62
  descripción matemática, 58, 62
Adyacente, 118
Aleatorio, paseo, 122, 124
Algebra, booleana, 46
Algoritmo, 41, 73, 74, 77, 78
  Kruskal, 75
  conjuntos de equilibramiento mínimo, 111
  Roy, 44
  tabulación de, 78
  punto único de reagrupamiento óptimo, 80
Análisis, 90
  contenido, 93
  nivel de, 122
  matemático, 58
  plan de, 122
  estadístico, 92
  técnico, 83
Antisimetría, 18, 20, 21; (*ver* Relación)
Aplicación, 21, 22
Arbol, 34, 35, 85; (*ver* Arista)
  algoritmo de Kruskal, 75
Arborescencia, 34, 76; (*ver* Arco, Arbol)
  longitud mínima, algoritmo, 80
  ramificación, 76
  mínima, 77
  mínima única, 79
  raíz de, 80
  longitud total de, 74
Arco, 28, 30, 46, 50, 51, 55, 66, 70, 71, 85; (*ver* Arista, Grafo),
  como canal de comunicación, 58
  suprimible, 68
  supresión del, 68
  origen del, 51
  conjuntos de, 66
  valor, 55
  valoraciones, 74
Area, 14
Arista, 34, 35, 107, 123, 126; (*ver* Arco)
  suma de, 118
  cambio de signo de, 107, 113, 116, 124
  suprimida, 76
  intra-clase, 101
  negativa, 98, 117
  positiva, 98, 101
  signo de, 104, 108
  tipos de, 100
Aritmética, solución del problema en la, 63
Automorfismo, 61

Base, 105
  de equilibrio, 108
  de desequilibrio, 131
Bavelas, A., 57, 58, 59
  índice de, 62
Berge, C., 76, 83, 85
Bibliografía, 135 - 139
Bi-grafo, 56
Bipartición, 101

Cadena, 24, 43, 44; (*ver* Conexidad)
  de Markov, 131
  signo de, 99
Camino, 27 - 35, 44, 67, 76, 118, 119; (*ver* Cadena, Pista)
  elemental, 33, 39
  hamiltoniano, 34
  longitud, 35, 55
Canal, 69, 76, 84
Casilla, 15, 37, 39, 86; (*ver* Comunicación)
Centralidad, 61
Centralización, orden de, 60
Centralizador, 88, 92; (*ver* Reagrupamiento)
Ciclo, 106
  equilibrado, 99
  regla de signo, 99
Cierre, 67
  μ - transitivo, 68
Circuito, 33, 100; (*ver* Ciclo)
  hamiltoniano, 42
Círculo de Euler, (*ver* Euler)
Clase, 52, 133
  disyunta, 19
  vacía, 131
  equivalente, 18, 19, 44
  universal máxima, 52
Clique, 46
  μ - transitiva, 66, 67
  de orden m, 47
Coalición, 49
Cohesividad de grupo, 42
Colección, 11
Complementariedad, 117
Componente, 43
  fuertemente conexo, 44
Computación, 124
Computador, 40
Comunicación, 58
  conexidad, 59
  costo, 55
  red, 90
  medio físico de, 57
  redundante, 92, 93

tiempo de, 84
verbal, 83
Conducta, 90
Conexidad, 49, 59
grado de, 46, 47
propiedades de la matriz de desviación, 45
semifuerte, 42, 43
tipos de, 46
unilateral, 42
Conjunto, 11, 12, 14, 15, 16
articulación, 49
equilibramiento, 109
completamente ordenado, 23
correspondencia, 52
disyunto, 13, 27
vacío, 12, 24, 26, 67
externamente estable, 47
intersección de, 13, 14
laticia, 52
linealmente ordenado, 24
mínimo de equilibramiento, 114
ordenado, 22 - 24
ordenado por inclusión, 52
partición de, 16
punto de, 47
posibles modelos, 65
potencia del, 11
diferencia simétrica, 26, 27
máximo universal, 24
mínimo universal, 24
Construcción, 19
Copia, 83; (*ver* Documento)
Correspondencia, 21, 29, 54, 108
biunívoca, 106
grafo de, 55
propiedades, 29
Costo, 59, 81, 90; (*ver* Comunicación)
mínimo, 73, 91, 93
de retransmisión de información, 83
de reproducción de mensajes, 82
de comunicación secundaria, 80

Desequilibrio, 122
grado de, 107
niveles de, 118
reducción, 120
determinación del grado de, 107
Desviación, 35, 41, 55, 61, 70, 96
algoritmo de computación, 39
infinita, 45
señalización, 70
suma, 83
Diferencia, 14
simétrica, 14, 26, 27, 118
Dinámica de grupos, 98
Disparidad, grado de, 63
Distancia, 24 - 28, 35; (*ver* Desviación)
Divergente, 95 (*ver* Comunicación, Información)
Documento, 82; (*ver* Información)
Duplicación, coste de, 82; (*ver* Comunicación, Información)

Eficacia, medida de, 91, 92
Elección, 73; (*ver* Modelo, Tarea)
Elemento, 11, 12, 14; (*ver* Arco, Punto)
máximo, 23
mínimo, 23

Emisión, 69; (*ver* Información)
grado de, 30
Emisores, 82
Equivalencia, 18, 67
Estabilidad, grafo, 47
Estímulo, 94
Estructura, 108
Euler, círculo de, 12, 13, 14, 27, 125

Feedback, 84
Firma, empresa, 86
Función, 21 - 22; (*ver* Grafo)
biunívoca, 50, 51
desviación, 71
identidad, 51, 61
propiedades, 56

Grafo, 61, 66, 81, 82, 85; (*ver* Arco, Punto)
adyacente, 118, 119, 130
algebraico, 56, 98, 126, 133
antiequilibrado, 106, 115
algebraico completo antiequilibrado, 114
matriz asociada, 128
automorfo, 61
equilibrio, 102, 133
base de equilibrio, 103
equilibrio del algebraico completo, 100
equilibramiento, 113, 116
clasificación, 106
red de comunicación, 58
completo, 29
algebraico completo, 98, 103
algebraico simétrico completo, 56
complejo, 132
determinación de componentes, 44
conexo, 76
conexidad, 42 - 45, 59, 107
definido por correspondiencia, 29
definición de equilibrio, 98, 99
simple, 55
grado de, 119
grado de equilibrio, 106 - 115
supresión de arcos, 46
componente máximo fuertemente conexo, 44
m-equilibrado, 100
grado de desequilibrio, 107
μ - mínimo, 68
n - puntos, 50, 105
no orientado, 117
no simétrico, 34
parcial, 32, 52
caminos de, 27 - 35
reducido, 126
reducción de, 32 - 33
reflexivo, 29
representación, 30
simple, 43
estabilidad, 47
fuertemente conexo, 44
simétrico, 29, 35, 46, 52, 54, 75
conexo simétrico, 43
transitivo, 29
desequilibrado, 98, 106
algebraico desequilibrado, 116
inconexo, 48
tipos de, 54 - 56

valoración de, 55
valorado, 55 , 83
Grupo, 55, 80
organización, 88
relaciones de poder, 96
estructura, 115
Grupo de discusión, 62, 86
Grupo social, 31, 47
Grupo de trabajo, 62
elección de modelos de tarea, 65
eficacia, 91
estudio experimental de, 86 - 88
modelo de preferencia, 90
organización óptima, 86
tarea, 58

Harary, F., 83, 100

Idempotencia, 12, 67; (*ver* Potencia, Unión)
Imagen, 21;(*ver* Función)
Inclusión, 17, 24, 52; (*ver* Relación)
estricta, 20
Indice, 59
de equilibrio, 106
de centralidad de decisión, 89
de desequilibrio, 118
Información, 64; (*ver* Comunicación)
alteración de, 84
control, 84
costo de retransmisión, 83
emisión de, 73, 74
intercambio, 95
localización final de, 63
primaria, 62, 64, 68, 88
secundaria, 64, 80
transmisión de, 69, 80, 84
Intersección, 14
vacía, 13
Intransitividad, 107
Invarianza, 67
Isomorfismo, 51, 61
Isotonía, 67

Kruskal, J.B., 83
caso de, 75, 76

Laticia, 25, 51, 85, 116, 118
definición, 24
representación gráfica, 27
n - puntos, 51, 52
propiedades, 24
unión de, 123
Lévi-Strauss, C., 133, 134
Ley asociativa, 12
Ley conmutativa, 12, 15
Ley distributiva, 14
Ley de reagrupamiento óptimo, 80
Libertad, grados de, 104
Líder, 131
Longitud, 55; (*ver* Camino)
de una arborescencia, 76
de un ciclo, 106
mínima, 69
Loop (bucle), 29, 50, 65; (*ver* Arco)
Luce, R.D., 46, 47
Lugar de reagrupamiento, 80

Makov, procesos, 131
Matriz, 30, 31, 36, 64, 66; (*ver* Grafo)
adición, 37
desviación, 37, 60
multiplicación, 37
cuadrada, 38
estocástica, 124, 128, 131
teoría de, 37
Mayoría, formación de, 95, 96
Medio, 57
Mensaje, 84; (*ver* Comunicación)
costo de reproducción, 82
intercambio de, 86
retransmisión, 82, 83
saturación, 83
μ - equivalencia, 50
μ - mínimo, 76
Modelo, 64 - 65
definición, 68
homogéneo, 88
intermediario, 88, 90
de organización óptima, 68
de tarea, 94
Mulder, 89
Multígrafo, 56, 65, 80, 85

Necesidad, 127
Necktie, 97
No conexidad, 46
No isomorfismo, 92
Notación, 12, 77
n - puntos, laticia de, 51
Núcleo, 47
propiedades de, 48

Operación conmutativa, 15, 26
Operación lógica, 12
Opinión, 94; (*ver* Comunicación)
Orden, 11
parcial, 17
estricto, 23
relación de, 19, 22
débil, 18
Organización:
efectiva, 90, 91
óptima, 66 - 68, 90

Par, 15, 22, 28, 80
Partición, 16
Pista, 35, 41, 55, 72, 81, 83, 119
algoritmo de determinación, 41
reducción a arcos, 79
Proceso de equilibramiento, 97 - 134
Producto, 15
asociativo, 103
cartesiano, 15, 22, 108
Posesor, 80; (*ver* Información)
Potencia, 11
Punto, 41, 44, 70, 77, 79, 98, 128; (*ver* Comunicación, Grafo, Pista)
de articulación, 48, 49, 92
computación de desviaciones de, 36
de reagrupamiento óptimo, 80, 81
de reagrupamiento, 80, 88, 92

Raíz, 34, 35, 76, 80; (*ver* Arborescencia)
Ramificación, 34, 76, 79; (*ver* Punto, Arbol)

Reagrupamiento, 64; (*ver* Información)
localización, 63
óptimo, 80, 81
Recepción, 30
localización de, 63
riesgo de error en la, 84
Receptor, 83; (*ver* Emisión, Información)
Red de comunicación, 57, 63 - 70, 82, 89
automorfa, 92
diagonal, 90
simétrica, 75
valoración, 82, 83
valorada, 59
Redundancia, 84
Reflexividad, 18, 19, 20, 21
Relación, 17; (*ver* Grafo)
todo o nada, 54
entre grafos, 85
arbitraria, 29
de igualdad, 18
de equivalencia, 18, 19, 32, 44, 51
de inclusión, 24, 115
de orden, 52
ortogonal, 17
propiedades, 17, 20
σ, 52
débil de orden, 18
Retransmisión, 83; (*ver* Comunicación, Información)
Roy, B., 50, 73, 84
algoritmo de, 43
Ruido, 84
Ruta, 118

Saturación, 83, 84
Segmento, 67, 69; (*ver* Pista)
Semigrado, 30
Semigrado externo, (*ver* Emisión)
Semigrado interno, (*ver* Recepción)
Semilaticia, 52, 67
Señalización, 44
computación de desviaciones por, 36
σ - equivalencia, 52
Simetría, 18; (*ver* Relación)
Shaw, M. E., 89, 90
Sociograma, 31, 56; (*ver* Multigrafo)
Sociomatriz, 31
Sociometría, 46
Status, sociométrico, 96
Subconjunto, 16, 68
Subgrafo, 31, 41
Sublaticia, 122
Subtarea, 83
Suficiencia, prueba de, 101, 126

Tarea, 68
comunicación necesaria para una, 64
definición, 83, 84
descripción de una, 62 - 70
modelo de, 85
Teorema, 40
de Bratton, 40, 69, 70
Teoría de la Información, 84
Test, sociométrico, 31
Transitividad, 18 - 21, 24
Transmisión, 73
riesgo de error en la, 84
saturación, 83
Triángulo, 103, 108
equilibrado, 99, 131
determinación de signo, 104
negativo, 101, 110, 114
positivo, 105, 110
signo del, 104, 110

Unión, 12, 14
semilaticia de, 67
constante, 55, 83, 90
red, 82
sistemas, 59

ESTE libro abre un nuevo camino. Pretende desarrollar las aplicaciones potenciales de la teoría matemática de relaciones arbitrarias a las ciencias del comportamiento.

El problema de la reducción de los problemas del comportamiento a términos matemáticos requiere la definición de un paralelo ambiental entre el problema y una estructura matemática manifestable. La teoría de grafos suministra el vehículo ideal para estructuras que son ricas en aplicaciones potenciales a las ciencias del comportamiento. Este importante estudio explora precisamente sus fuentes y desarrolla varios ejemplos importantes.

Comenzando con una introducción a la teoría de grafos, examinamos, por orden:

Conjuntos y operaciones entre conjuntos, relaciones y funciones, conjuntos ordenados, laticias, distancias en un conjunto, grafos y caminos de un grafo, longitudes y desviaciones en un grafo, conexidad de un grafo y nociones afines, el conjunto de grafos de «n» puntos y varios tipos de grafos.

Un examen de las redes de comunicación que sigue a la introducción, presenta:

El problema, descripción de una red de comunicación, descripción de una tarea en términos de comunicación, organización óptima y aplicaciones.

La tercera sección de este trabajo trata de los procesos de equilibramiento:

El problema, definición de equilibrio de un grafo, características de los grafos equilibrados, grado de inequilibrio de un grafo, procesos de equilibramiento y aplicaciones.

Junto con una bibliografía de las importantes contribuciones a este campo, la monografía suministra al lector un valioso registro de las investigaciones y resultados que han sido encontrados en una nueva e importante parcela de las ciencias del comportamiento.